浙 江 理 工 大 学

二OO七年硕士学位研究生招生入学考试试题

考试科目：高等代数　　　　代码：412

（*请考生在答题纸上答题，在此试题纸上答题无效）

一. 设 $f(x)=x^2+2x+3, g(x)=x^3-2$.

(1) 求多项式 $u(x),v(x)$ 使得 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x))$;

(2) 求有理系数多项式 $h(x)$ 使得 $h(\sqrt[3]{2})=\dfrac{1}{3+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}$. (20 分)

二. 设 $A=\begin{bmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{bmatrix}$, E 为单位矩阵,

$$A^*B(\frac{1}{2}A^*)^*=8A^{-1}B+12E,$$

求矩阵 B. (15 分)

三. 设 $A\in P^{n\times n}$.

(1) 证明: 全体与 A 可交换的矩阵全体组成 $P^{n\times n}$ 的一子空间, 记为 $C(A)$;

(2) 当

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&\cdots&0\\0&2&0&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&n\end{bmatrix}$$

时, 求 $C(A)$ 的维数和一组基. (20 分)

四. 设

$$\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}), i=1,2,\cdots,r; \quad (1)$$

$$\beta_j=(b_{j1},b_{j2},\cdots,b_{jn}), j=1,2,\cdots,s. \quad (2)$$

为两个 n 维向量组.

证明向量组(1)和向量组(2)等价的充分必要条件是齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdots+a_{rn}x_n=0 \end{cases} \qquad (3)$$

和

$$\begin{cases} b_{11}x_1+b_{12}x_2+\cdots+b_{1n}x_n=0 \\ b_{21}x_1+b_{22}x_2+\cdots+b_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{s1}x_1+b_{s2}x_2+\cdots+b_{sn}x_n=0 \end{cases} \qquad (4)$$

同解. (20 分)

五. 设 A,B 为 n 阶实对称矩阵，且 B 正定. 证明有可逆矩阵 C 使得 $C'AC$ 和 $C'BC$ 同时为对角矩阵. (15 分)

六. 在 R^5 中将 $\alpha_1=(1,1,1,1,1),\alpha_2=(1,1,1,1,-4)$ 扩张成为一组正交基，并将得到的正交基化为标准正交基. (20 分)

七. 数域 P 上 n 维线性空间 V 上线性变换 A 称为投影变换,若 $A^2=A$. 证明，若 A 为投影变换，则

(1) $AV\cap A^{-1}(0)=\{0\}$;

(2) 存在 V 一组基，使得在此基下 A 的矩阵为 $\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,其中 E_r 为 r 阶单位矩阵；并说明 r 的意义. (20 分)

八. 设 $W_1=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r),W_2=L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$ 为 R^n 的两个子空间. 其中

$$\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}),i=1,2,\cdots,r;$$

$$\beta_j=(b_{j1},b_{j2},\cdots,b_{jn}),j=1,2,\cdots,s.$$

给出计算 W_1+W_2 和 $W_1\cap W_2$ 的基与维数的一般方法，并说明所给方法的正确性. (20 分)