浙 江 理 工 大 学

2011 年硕士学位研究生招生入学考试试题

考试科目：　高等代数　　　　　　　代码：912

（请考生在答题纸上答题，在此试题纸上答题无效）

一.（15 分）. 证明：如果一非零的整系数多项式能够分解成两个次数较低的有理系数多项式的乘积，那么它一定能分解成两个次数较低的整系数多项式的乘积.

二.（ 10 分）设 A 为 n 阶方阵. 证明 $|A|=0$ 的充要条件是有 n 维列向量 b 使得方程组

$$AX=b$$

无解.

三.（20） a,b 取何值时，方程组

$$\begin{cases} ax_1+bx_2+2x_3 &=1 \\ ax_1+(2b-1)x_2+3x_3 &=1 \\ ax_1+bx_2-(b+3)x_3 &=2b-1 \end{cases}$$

有唯一解？有无穷多解？在有无穷多解时求解.

四.（15 分）设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 为数域 P 上 n 维空间 V 的一组基， A 为 P 上 $m\times n$ 矩阵.

$$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)A.$$

为 V 上一个向量组. 证明向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 和矩阵 A 有相同的秩.

五.（15 分）设 $f(x_1,x_2,x_3)=\lambda(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$.

（i） λ 取何值时，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 正定？

（ii） λ 取何值时，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 负定？

（iii） $\lambda=2,-1$ 时， $f(x_1,x_2,x_3)$ 分别为什么类型二次型？

六.（15 分） 叙述线性空间的定义并验证全体实数的二元数列， 对于下面定义的运算是否构成线性空间：

$$(a_1,b_1)\oplus(a_2,b_2)=(a_1+a_2,b_1+b_2+a_1a_2),$$
$$k\circ(a_1,b_1)=(ka_1,kb_1+\frac{k(k-1)}{2}a_1^2)$$

七. (15 分) 证明

$$f_1(x)=1,\ f_2(x)=x-1,\ f_3(x)=x^2-2x+1$$

是 $R[x]_3$ 的一组基；并求 $f(x)=2x^2-5x+6$ 关于此基坐标。

八.（15 分）设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 为线性空间 V 的一组基，线性变换 $\boldsymbol{A}$ 在此基下矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

分别求 $\boldsymbol{A}$ 的值域与核的一组基.

九.（15 分）设 $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & 6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

（i）求矩阵 A 的若当标准形；

（ii）若 R^4 上线性变换 $\boldsymbol{A}$ 在标准基下矩阵为 A，问是否存在 R^4 另一组基 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$，使 $\boldsymbol{A}$ 在 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 下矩阵为对角矩阵？

十.（15）证明：若 A,B 均为 n 阶正定矩阵，则 $|A+B|>|A|$.