浙江工商大学 2012 年硕士研究生入学考试试卷（B）卷

招生专业：统计学　　考试科目：**概率论与数理统计**

科目代码：813　　总分：150 分　　考试时间：3 小时

1.（本题 15 分）假设一厂家生产的每台仪器，以概率 0.70 可以直接出厂．以概率 0.30 需进一步调试，经调试后以概率 0.80 可以出厂，以概率 0.20 定为不合格不能出厂．现该厂新生产了 $n(n\geq 2)$ 台仪器（假设各台仪器的生产过程相互独立）。求：

（1）全部能出厂的概率 α；

（2）其中恰好有两件不能出厂的概率 β；

（3）其中至少有两件不能出厂的概率 θ。

2.（本题 15 分）设 (X,Y,Z) 的联合概率密度函数为：

$$f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{1}{8\pi^3}(1-\sin x\sin y\sin z), & \text{当} 0\leq x\leq 2\pi, 0\leq y\leq 2\pi, 0\leq z\leq 2\pi \text{时} \\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

试证：X,Y,Z 两两独立，但不相互独立。

3.（本题 15 分）袋中有 n 张卡片，记号码分别为 $1,2,\cdots,n$，现在从中有放回地抽出 k 张卡片，求所得号码之和 X 的数学期望及方差．

4.（本题 15 分）设 (X,Y) 服从单位圆上的均匀分布， 求：（1）(X,Y) 的联合概率密度函数；（2）(X,Y) 的边缘概率密度函数（3）求出相应的条件概率密度函数。

5.（本题 15 分）试分别利用 (1) 切比雪夫不等式；(2) 中心极限定理；确定投掷一枚均匀硬币的次数，使得出现”正面向上”的频率在 0.4 到 0.6 之间的概率不小于 0.9.

6.（本题 15 分）设随机变量序列 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 相互独立，且每一个随机变量的方差为有限，我们记 $DX_i\leq C, i=1,2,\cdots$，其中 C 为常数．试证，对 $\forall\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i\right|\geq\varepsilon\right)=0 \text{ 和 } \lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i\right|<\varepsilon\right)=1$$

成立．

7．（本题 15=7+8 分）（1）设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 $X\sim b(1,p)$（二点分布）的简单随机样本，$\overline{X}$ 是样本均值，求当 $p=0.2$ 时样本容量 n 应取多大，才能使得 $E|\overline{X}-\mu|^2\le 0.01$。

（2）设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 $X\sim\chi^2(m)$ 的简单随机样本，X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(m/2)2^{m/2}}x^{m/2-1}e^{-x/2} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

求样本均值 $\overline{X}$ 的密度函数。

8．（本题 15 分）设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，总体 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}(\alpha+1)x^{\alpha} & 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

求参数 α 的矩估计和最大似然估计。

9．（本题 10 分）设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，

$S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 是样本方差，证明 $\hat{\sigma}=\dfrac{\Gamma(\frac{n-1}{2})\sqrt{n-1}}{\Gamma(\frac{n}{2})\sqrt{2}}S$ 是参数 σ 的无偏估计。

10．（本题 20 分）设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，X 服从 $(0,\theta)$ 上均匀分布，记 $X_{(n)}=\max\{X_1,\cdots,X_n\}$，设检验问题：$H_0:\theta\le\theta_0$ 对 $H_1:\theta>\theta_0$ 的拒绝域为 $W=\{X_{(n)}>c\}$，（1）求 $X_{(n)}$ 的密度函数；（2）求犯二类错误的概率 α,β；（3）若取 $\theta_0=0.5$，求 c 使得 α 的最大值等于 0.05。