温州大學

2011 年硕士研究生招生入学考试试题

科目代码及名称： 816 高等代数（A） **适用专业：应用数学**

（请考生在答题纸上答题，在此试题纸上答题无效）

1 (12 分)、证明：多项式 $f(x)=x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$ 能被多项式 x^2+x+1 整除，其中 m,n,p 为任意非负整数.

2 (20 分)、计算下列行列式：

（1）$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$； （2）$\begin{vmatrix} 9 & 5 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 5 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & \cdots & & \cdots & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 9 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 4 & 9 \end{vmatrix}$（$n$ 级）.

3 (12 分) 、设线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \qquad (I)$$

的系数矩阵 A 的秩等于矩阵

$$B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n & 0 \end{pmatrix}$$

的秩. 证明方程组 (I) 有解.

4 (10 分)、设

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

且满足 $AB+E=A^2+B$ （E 表示单位矩阵)，求 B.

5 (10 分)、设 A 是实对称矩阵. 证明：当实数 t 充分大之后，$tE+A$ 是正定矩阵.

6 (16 分)、设有向量组

$$\alpha_1=(1,0,2,1),\alpha_2=(2,0,1,-1),\alpha_3=(3,0,3,0),$$

$\beta_1=(1,1,0,1),\beta_2=(4,1,3,1)$.

令 $V_1=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $V_2=L(\beta_1,\beta_2)$. 求 V_1+V_2 的维数和一组基.

7 (25 分)、设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$. (1) 求可逆矩阵 T 使得 $T^{-1}AT$ 为对角矩阵; (2) 求 A^{2011}.

8 (10 分)、证明：多项式 $f(x)=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}$ 不能有重根.

9 (15 分)、设 $A,B\in P^{n\times n}$, A 在数域 P 中有 n 个不同特征值. 证明：A 的特征向量都是 B 的特征向量的充要条件是 $AB=BA$.

10 (20 分)、设 A 是一个 3 阶正交矩阵，且 $|A|=1$.

（1）证明：$\lambda=1$ 必为 A 的特征值;

（2）证明：存在正交矩阵 Q，使得

$$Q'AQ=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&\sin\theta\\0&-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}.$$