宁波大学 2009 年攻读硕士学位研究生

入学考试试题(答案必须写在答题纸上)

考试科目: 高等代数 (A 卷) 考码: 811 专业名称: 基础数学、应用数学

一. 填空题(每小题 4 分,共 20 分)

1. 设多项式 $f(x)=x^3+(1+t)x^2+4x+2u$ 与 $g(x)=x^3+tx^2+2u$ 的最大公因式是一个二次多项式,则 t,u 的值为________.

2. 设 n 阶方阵 A 的各行元素之和等于零,且 A 的秩为 $n-1$,则齐次线性方程组 $AX=0$ 的通解为________.

3. 设 $\alpha=(1,0,-1)'$,矩阵 $A=\alpha\alpha'$,n 为正整数,则 $|kE-A^n|=$________.

4. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=3x_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$ 的正惯性指数为____,符号差为____.

5. 设 n 阶实数矩阵 A 的秩为 r,则 $A'A$ 的零特征值有______个.

二. (10 分) 设 $f(x),g(x)$ 是数域 P 上两个一元多项式,m 为给定的正整数,证明:$f(x)\mid g(x)$ 的充分必要条件是 $f^m(x)\mid g^m(x)$.

三. (12 分) 计算下列行列式

$$\begin{vmatrix} x_1+a_1 & x_1 & x_1 & \cdots & x_1 \\ x_2 & x_2+a_2 & x_2 & \cdots & x_2 \\ x_3 & x_3 & x_3+a_3 & \cdots & x_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n & x_n & x_n & \cdots & x_n+a_n \end{vmatrix} \quad (a_1a_2\cdots a_n\neq 0)$$

四. (16 分) 讨论 a,b 满足什么条件时,下列线性方程组有唯一解?无穷多解?无解?当有无穷解时,求出该方程组的通解.其中方程组为 $\begin{cases} ax_1+3x_2+3x_3=3 \\ x_1+4x_2+x_3=1 \\ 2x_1+2x_2+bx_3=2 \end{cases}$

宁波大学 2009 年攻读硕士学位研究生

入 学 考 试 试 题(答案必须写在答题纸上)

考试科目: 高等代数 (A 卷) 考码: 811 专业名称: 基础数学、应用数学

五.(16 分) 设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ 为 $m\times n$ 的实数矩阵,

1. 证明: $秩(AA')=秩(A'A)=秩(A)$.
2. 证明: 矩阵 $A'A$ 正定的充分必要条件是 $秩(A)=n$.

六.(18 分)

1. 证明: 向量组的任何一个线性无关组都可以扩充成一个极大线性无关组.
2. 设 $\alpha_1=(1,-1,2,4),\alpha_2=(0,3,1,2),\alpha_3=(3,0,7,14),\alpha_4=(1,-1,2,0),\alpha_5=(2,1,5,6)$, 把 α_1,α_2 扩充成一个极大无关组, 并把其余向量用此极大无关组线性表示.

七.(14 分) 在 P^3 中, 求由基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 到基 η_1,η_2,η_3 的过渡矩阵, 并求向量 $\alpha=(1,0,0)$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的坐标, 其中 $\begin{cases}\varepsilon_1=(-1,1,1)\\ \varepsilon_2=(2,1,1)\\ \varepsilon_3=(-1,0,1)\end{cases}$, $\begin{cases}\eta_1=(1,2,-1)\\ \eta_2=(2,2,-1)\\ \eta_3=(2,-1,-1)\end{cases}$.

八.(18 分) 设 $f_1(x),f_2(x),f(x)=f_1(x)f_2(x)$ 为数域 P 上一元多项式, A 为 n 阶方阵, 用 W,W_1,W_2 分别表示齐次线性方程组 $f(A)X=0,f_1(A)X=0,f_2(A)X=0$ 的解空间,

1. 证明: W_1,W_2 都是 W 的子空间;
2. 证明: 如果 $(f_1(x),f_2(x))=1$, 那么 $W=W_1\oplus W_2$.

九.(16 分) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$, 求正交矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵, 并写出对角矩阵.

十.(10 分) 证明: 欧氏空间 R^n (通常内积) 的任一子空间 U 是一个齐次线性方程组的解空间.