宁波大学 <u>2011</u> 年攻读硕士学位研究生

入学考试试题(答案必须写在答题纸上)

考试科目: 高等代数 (A 卷) 考码: 811 专业名称: 基础数学、应用数学

一. 填空题(第小题 4 分,共 40 分)

1. 已知 $f(x)=x^4+2x^3-x^2-4x-2, g(x)=x^4+x^3-x^2-2x-2$,

那么 $(f(x),g(x))=$________.

2. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1}\end{pmatrix}, a_i \neq a_j, X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$,

则线性方程组 $A'X=B$ 的解为________. 其中 A' 表示 A 的转置矩阵.

3. 设四元线性方程组 $AX=b$ 的系数矩阵 A 的秩为 3, β_1,β_2,β_3 为 $AX=b$ 的三个解, 且 $\beta_1=(2,0,0,2)', \beta_2+\beta_3=(0,2,2,0)'$, 则 $AX=b$ 的通解为________.

4. 设 A, B 为 2 阶方阵, A^*, B^* 为 A, B 的伴随矩阵, 若 $|A|=2, |B|=3$,

则分块矩阵 $\begin{pmatrix}0 & A\\ B & 0\end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为 ________.

5. 设 A, P 均为三阶矩阵, 且 $P'AP=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$,

若 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3), Q=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)$, 则 $Q'AQ$ 为 ________.

6. n 阶实对称矩阵 A 按合同关系进行分类, 共有________类.

宁波大学 2011 年攻读硕士学位研究生

入学考试试题(答案必须写在答题纸上)

考试科目: 高等代数 (A 卷) 考码: 811 专业名称: 基础数学、应用数学

7. 写出矩阵 $A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 6\\ -1 & 0 & 3\\ -1 & -1 & 4\end{pmatrix}$ 的 Jordan 标准形________.

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 维线性空间 V 的线性变换，则下列结论正确的有哪些？________.

   A. 值域 $\boldsymbol{A}V$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的不变子空间,　　B. $\boldsymbol{A}V=V$,

   C. $\dim \boldsymbol{A}V+\dim \boldsymbol{A}^{-1}(0)=n$,　　D. $\boldsymbol{A}V\oplus \boldsymbol{A}^{-1}(0)=V$.

9. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 n 维欧氏空间 V 的一组标准正交基，V 中向量

   $\alpha=x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n,\beta=y_1\alpha_1+\cdots+y_n\alpha_n$，则 $(\alpha,\beta)=$________.

10. 设 $\xi=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ 是矩阵 $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 5 & a & 3\\ -1 & b & -2\end{pmatrix}$ 的特征向量，则 $a=$____，$b=$____.

二．计算题（共 60 分）

1．(15 分) 设向量组 $\alpha_1=(1,1,1,3),\alpha_2=(-1,-3,5,1),\alpha_3=(3,2,-1,p+2),\alpha_4=(-2,-6,10,p)$，

（1）p 为何值时，该向量组线性无关？并将 $\alpha=(4,1,6,10)$ 用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表出。

（2）p 为何值时，该向量组线性相关？求出它的秩和一个极大线性无关组。

2．(15 分) 设 $\alpha_1=(1,1,-1,2),\alpha_2=(2,-1,3,0),\alpha_3=(0,-3,5,-4)$，$V_1=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，

$\beta_1=(1,2,2,1),\beta_2=(4,-3,3,1)$，$V_2=L(\beta_1,\beta_2)$，

求子空间 V_1+V_2、$V_1\cap V_2$ 的维数与一组基.

3．(15 分) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 4\\ 2 & 0 & 2\\ 4 & 3 & 2\end{pmatrix}$，求正交矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵，并写出对角矩阵.

宁波大学 2011 年攻读硕士学位研究生

入 学 考 试 试 题(答案必须写在答题纸上)

考试科目: 高等代数 (A 卷) 考码: 811 专业名称: 基础数学、应用数学

4. (15 分) 在 P^3 中取两组基: $\begin{cases} \alpha_1 = (1,1,1) \\ \alpha_2 = (1,0,-1) \\ \alpha_3 = (1,2,1) \end{cases}$, $\begin{cases} \beta_1 = (2,2,1) \\ \beta_2 = (1,1,-1) \\ \beta_3 = (-1,0,1) \end{cases}$,

定义线性变换: $\boldsymbol{A}\alpha_i = \beta_i, i = 1,2,3$,

(1). 求由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵.

(2). 求线性变换 $\boldsymbol{A}$ 在基 β_1,β_2,β_3 下的矩阵.

(3). 求向量 $\alpha = (2,1,-1)$ 的象 $\boldsymbol{A}\alpha$.

三. 证明题:(共 50 分)

1. (15 分) 设 $f(x)$ 为复数域上的 n 次多项式, $f'(x) \neq 0, g(x) = xf(x)$, 证明:

(1) 若 $f'(x) \mid f(x)$, 则 $f(x)$ 有 n 重根。

(2) 若 $f(0) = 0$, 且 $f'(x) \mid g'(x)$, 则 $g(x)$ 有 $n+1$ 重根。

2. (13 分) 设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ 为 $m \times n$ 的实数矩阵, 证明:

(1) 二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \sum_{i=1}^{m}(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n)^2$ 矩阵为 $A'A$.

(2) 上述二次型 f 正定的充分必要条件是秩$(A) = n$.

3. (12 分) 设 $R^{2\times 2}$ 是全体实 2 阶方阵组成的线性空间, $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| a,b \in R \right\}$, 证明:

(1) W 是 $R^{2\times 2}$ 的子空间, 并求出 W 的维数和一组基。

(2) 复数域 C 作为 R 上的线性空间与 W 同构, 并写出同构映射。

4. (10 分) 设 V_1,V_2 是 n 维欧氏空间 V 的子空间, 且 V_1 的维数小于 V_2 的维数,

证明: $V_2 \cap V_1^{\perp} \neq \{0\}$.