X126

浙 江 大 学

200 、年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目 高等代数　　　　　　　　编号 226

注意：答案必须写在答题纸上，写在试题纸或草稿上均无效。

一、(20分) f(x) 是数域 P 上的不可约多项式

(1) g(x) ∈P[x]，且与 f(x) 有一公共复根，证明 f(x) | g(x)

(2) 若 c 及 1/c 都是 f(x) 的根，b 是 f(x) 的任一根，证明 1/b 也是 f(x) 的根

二、(10分)计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & & & & & & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

三、(20分)

(1) A 是正定阵，C 是实对称矩阵，证明：存在可逆阵 P 使得 $P'AP$, $P'CP$ 同时为对角形。

(2) A 是正定阵，B 是实矩阵，而 AB 是实对称的，证明：AB 正定的充要条件是 B 的特征值全大于 0.

四、(20分) 设 n 维线性空间 V 的线性变换 A 有 n 个互异的特征值，线性变换 B 与 A 可交换的充要条件是 B 是 E, A, A^2, … A^{n-1} 的线性组合，其中 E 为恒等变换.

五、(10分) 证明：n 阶幂零指数为 n-1 矩阵都相似.

（若 $A^{n-1}=0$，而 $A^{n-2}\neq 0$ 称 A 的幂零指数为 n-1）

六、(20分)设 A, B 是 n 维欧氏空间的线性变换，对任意 α，β ∈V，都有 $(A(\alpha),\beta)=(\alpha,B(\beta))$，证明 A 的核等于 B 的值域的正交补.

四、（15 分）

1. 设方程组 $\begin{cases} x+y+u+v=0 \\ x\sin u+y\sin v=0 \end{cases}$ 确定了可微函数 $\begin{cases} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \end{cases}$，试求 $du, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$.

2. 设 $F(y)=\displaystyle\int_y^{\sqrt{y}} \frac{\cos(x^2y)}{x}dx$，求 $F'(1)$.

五、（30 分）

1. 计算定积分 $I=\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin|\cos x|}{1+\cos^2 x}dx$.

2. 求以曲面 $z=e^{-x^2-y^2}$ 为顶，以平面 $z=0$ 为底，以柱面 $x^2+y^2=1$ 为侧面的曲顶柱体的体积 V.

3. 设 Σ_+ 表示半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ $(x^2+y^2\le 1)$ 的上侧，求第二类曲面积分

$$J=\iint_{\Sigma_+}(x+y)z^2dydz+(x^2y-2z)dzdx+(2x+z)y^2dxdy.$$

六、（20 分）

1. 将函数 $f(x)=|x|$ $(-\pi\le x\le\pi)$ 展开成 Fourier 级数。
2. 求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的和
3. 计算广义积分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}dx$.