X156

浙　江　大　学

2000 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目 数学分析　　　　　　　　编号 804

注意：答案必须写在答题纸上，写在试题纸或草稿上均无效。

一、（10 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}$.　　$\dfrac{e}{2}$

2. 设 $x_0=a,\ x_1=b,\ x_n=\dfrac{x_{n-2}+x_{n-1}}{2},\ n=2,3,\cdots\cdots$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

二、（10 分）

1. 设 $f'(0)=K$，试证明

$$\lim_{\substack{a\to 0-\\ b\to 0+}}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=K.$$

2. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f''(x)$ 在 (a,b) 内存在，试证明存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f(b)+f(a)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi).$$

三、（15 分）

1. 求数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}$ 的和 S.　　2

2. 试证明 $\zeta(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^x}$ 是 $(1,\infty)$ 上的连续函数。

(四) 设A是一个$n\times n$矩阵且$A^2=A$

求证 (i) 存在n级可逆矩阵P，使$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

其中E_r为r级单位矩阵，$r\leq n$.

(ii) 秩(A)+秩(E−A)=n.

(iii) A可表为两个对称矩阵的积. (15分)

(五) 设A, B都是n级方阵且AB=BA，设A有n个不同的特征值，证明B相似于对角矩阵. (10分)

(六) 设U与W分别是数域P上齐次线性方程组

$x_1+\cdots+x_n=0$ 与 $x_1=x_2=\cdots=x_{n-1}=x_n$

的解空间. 求证 $P^n=U\oplus W$ (直和)

(本题10分)

(七) 证明任一n级复矩阵A均可分解为$A=M+N$，其中M为幂零矩阵(即存在某个正整数k使$M^k=0$)，而N相似于对角矩阵，而且$MN=NM$. (15分)

(八) 设$A=(a_{ij})_{n\times n}$是n级实矩阵，若对于内积

$(\alpha,\beta)=\alpha A\beta'$，$\alpha,\beta\in R^n$ (n维实行向量空间)

R^n作成一个欧氏空间，证明A是正定矩阵. (10分)

(九) 设A, B是数域P上n级方阵且满足AB=BA.

求证：秩(A+B)≤秩(A)+秩(B)−秩(AB).

(10分)