浙 江 大 学

二〇〇五年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目 数学分析 编号 427

注意：答案必须写在答题纸上，写在试卷或草稿纸上均无效。

一. (10 分) 计算定积分 $\int_0^{\pi} e^x \sin^2 x dx$ 。

二. (10 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上 Riemann 可积，且 $\int_0^1 f(x)dx = \frac{\sqrt{3}}{2}$，计算：$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} 4\ln\left[1+\frac{1}{n}f\left(\frac{i}{n}\right)\right]$。

三. (15 分) 设 a,b,c 为实数，且 $b>-1, c\neq 0$。试确定 a,b,c 的值，使得

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax-\sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}dt} = c \text{。}$$

四. (15 分) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且对每一个 $x\in[a,b]$，存在 $y\in[a,b]$，使得 $|f(y)|\le \frac{1}{2}|f(x)|$。证明：存在 $\xi\in[a,b]$，使得 $f(\xi)=0$。

五. (20 分) (1) 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，且 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛。证明：存在数列 $\{x_n\}\subset[a,+\infty)$，满足条件 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$，$\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=0$。(2) 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，$f(x)\ge 0$，且 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛。问：是否必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$？为什么？

六. (15 分) 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上具有二阶连续导数，且已知 $M_0=\sup\{|f(x)|; x\in(0,+\infty)\}$ 和 $M_2=\sup\{|f''(x)|; x\in(0,+\infty)\}$ 均为有限数。证明：

(1) $|f'(x)|\le \frac{2M_0}{t}+\frac{t}{2}M_2$ 对任何的 $t>0$，$x\in(0,+\infty)$ 均成立；

（2）$M_1=\sup\{|f'(x)|;x\in(0,+\infty)\}$ 也是有限数，并且满足不等式 $M_1\le 2\sqrt{M_0M_2}$。

七.（10 分）设 $f(x)$ 在任何有限区间上 Riemann 可积，且 $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx$ 收敛。证明：

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\sin(nx)dx=0。$$

八.（15 分）（1）将 $\operatorname{arctg}x$ 展开为幂级数，求收敛半径；

（2）利用（1）证明：$\pi=4-\frac{4}{3}+\frac{4}{5}-\cdots+\frac{(-1)^n 4}{2n+1}+\cdots$；

（3）利用（2）中公式近似计算 π 的值，需要用多少项求和，误差会不超过 10^{-m}（m 为自然数），为什么？

九.（15 分）设 $u(x,y)$ 是 $R^2\setminus\{(0,0)\}$ 上 C^2 径向函数，即存在一元函数 f 使得 $u(x,y)=f(r),r=\sqrt{x^2+y^2}$。若 $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$，求 f 满足的方程及函数 $u(x,y)$。

十.（25 分）（1）设 f 是 R^1 上 C^1，周期为 L 的函数（$L>0$），且 $\int_0^L f(t)dt=0$。利用 f 的 Fourier 级数展开证明：

$$\int_0^L|f'(t)|^2\,dt\ge\frac{4\pi^2}{L^2}\int_0^L|f(t)|^2\,dt,$$

等号成立当且仅当存在常数 a_{-1},a_1 使得 $f(t)=a_{-1}e^{-2\pi i\frac{t}{L}}+a_1e^{2\pi i\frac{t}{L}}$。

（2）设 Ω 是 R^2 上具有 C^1 光滑边界的连通区域。设 $A(\Omega)$ 是 Ω 的面积，则，

$$2A(\Omega)=\int_\Omega \operatorname{div}\vec r\,dxdy=\int_{\partial\Omega}\vec r\cdot\vec v\,ds$$

其中向量场 $\vec r(x,y)=r_1(x,y)\vec i+r_2(x,y)\vec j$，$r_1(x,y)=x,r_2(x,y)=y$，$\vec i,\vec j$ 分别是 x 轴和 y 轴的单位向量；$\vec v$ 是边界 $\partial\Omega$ 的单位外法向量，ds 边界 $\partial\Omega$ 的弧长微分。

(3) 设 Ω 同上，$l(\partial\Omega)$ 是 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 的长度。利用（1）（2）证明：

$$l(\partial\Omega)^2\ge 4\pi\,A(\Omega),$$

等号成立当且仅当 Ω 是圆盘。