浙 江 大 学

二〇〇六年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目 高等代数 编号 341

注意：答案必须写在答题纸上，写在试卷或草稿纸上均无效。

1.（15 分）证明：如果矩阵 A 和 B 有一样数目的行个数，并且 B 的每一列单独添加到 A 上时，A 的秩不变，那么当把 B 的所有列同时都添加到 A 上时，A 的秩也不变。

2.（15 分，其中（i）为 9 分，（ii）为 6 分）

（i）把行列式
$$D=\begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & \cdots a_{1n}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & \cdots a_{2n}+x \\ & \cdots & \\ a_{n1}+x & a_{n2}+x & \cdots a_{nn}+x \end{vmatrix}$$
表为按 x 的幂排列的多项式；

（ii）证明：如果对行列式所有的元素加上同一个数，则这个行列式所有元素的代数余子式之和不变。

3.（15 分）证明如下（i）和（ii）是等价的：

（i）方阵 A 是正交矩阵；

（ii）方阵 A 的行列式等于 ±1，并且当 $|A|=1$ 时，A 的每一个元素等于该元素自己的代数余子式，当 $|A|=-1$ 时，A 的每一个元素等于该元素自己的代数余子式乘以 -1。

4. (15 分，其中（i）为 8 分，（ii）为 7 分)

（i）证明矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 满足方程 $x^2-(a+d)x+ad-bc=0$；

（ii）令 A 是二阶矩阵，k 是大于 2 的整数，证明：$A^k=0$ 当且仅当 $A^2=0$。

5. (15 分) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=P^{-1}A^*P$。求 $B+2E$ 的特征值与特征向量，其中 A^* 为 A 的伴随矩阵，E 为 3 阶单位矩阵。

6. (15 分) 设 W_1,W_2,W 都是数域 P 上 n 维线性空间 V 的子空间，其中 $W_1\subseteq W_2$ 且 $W_1\cap W=W_2\cap W$, $W_1+W=W_2+W$。求证：$W_1=W_2$。

7. (15 分) 假设三阶方阵 A, B, C, D 有相同的特征多项式，求证：其中必有两个方阵相似。

8. (15 分) 如果 φ 是 n 维欧氏空间的正交变换，W 是 φ 的不变子空间，求证：W 的正交补 $W^{\perp}$ 也是 φ 的不变子空间。

9. (15 分) 设 A 是 n 阶实矩阵，证明：存在正交矩阵 G 使 $G^{-1}AG$ 为上三角矩阵的充要条件是 A 的特征值全是实数。

10. (15 分) 设 P 是一个数域，$f_i=f_i(x)\in P[x]$, $g_i=g_i(x)\in P[x]$ 对于 i=1, 2. 求证：$(f_1, g_1)(f_2, g_2)=(f_1f_2, f_1g_2, g_1f_2, g_1g_2)$.