机密★启用前

江苏大学 2011 年硕士研究生入学考试试题

603

考试科目：高等数学

考生注意：答案必须写在答题纸上，写在试题及草稿纸上无效!

一、填空题（每小题 4 分，共 24 分）

1、设 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\ln(1+x)\right)^{\frac{a}{x}}=\int_{-\infty}^{a}te^{t}dt$， 则 $a=$ ________.

2、 $\lim\limits_{x\to 0}\cot x(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x})=$________.

3、 已知极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{2011}}{n^{k}-(n-1)^{k}}$ 存在且不为零，则 $k=$ ______.

4、 已知 $\dfrac{d}{dx}f\left(\dfrac{1}{x^{3}}\right)=\dfrac{1}{x^{3}}$， 则 $f'(\dfrac{1}{8})=$______.

5、设 $G(x)=\int_{0}^{x}tf(x^{2}-t^{2})dt$，其中 f 为连续函数，则 $\dfrac{d}{dx}G(x)=$________

6、设 $f(x)$ 在 x_0 点可导，则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n[f(x_0+\dfrac{1}{n})-f(x_0-\dfrac{1}{2n})]=$________.

二、选择题（每小题 4 分，共 24 分）

1、设 $f(x)=3^{x}+\sqrt{1+x}-2$，则当 $x\to 0$ 时 [ ]

(a) $f(x)$ 是 x 的等价无穷小 (b) $f(x)$ 是比 x 高价的无穷小

(c) $f(x)$ 是比 x 低价的无穷小 (d) $f(x)$ 是 x 的同阶但非等价无穷小

2、设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\tan x+b(x-\sin x)}{c\ln(1-2x)+d(1-\cos x)}=2$，$a^{2}+c^{2}\neq 0$， 则必有 [ ]

(a) $a=-4c$ (b) $b=-4d$

(c) $a=4c$ (d) $b=4d$

3、设 $f(x)=4x^4-3x^3|x|$，则使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数 n 为 [ ]

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

4、设 $f(x)$ 连续，$F(a)=\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-a\cos nx]^2dx$ 取得极小值时，a 的值为 [ ]

(a) $\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx$ (b) $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx$

(c) $\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx$ (d) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx$

5、设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x)}{1+e^{\frac{1}{x}}}, x\neq 0,\\ 0, \quad x=0.\end{cases}$ 则 [ ]

(a) $f(x)$ 在 $x=0$ 处间断；

(b) $f(x)$ 在 $x=0$ 连续但不可导；

(c) $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，但导数在 $x=0$ 处不连续；

(d) $f(x)$ 的导数在 $x=0$ 处连续；

6、设 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x-\ln x)(2x-\ln x)(3x-\ln x)(4x\ln x)}{(\sqrt[3]{x^4}-\sin x)^{\alpha}}=\beta,\beta\neq 0$，则 α 的数值为 [ ]

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

三、[9 分] 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^3}}$.

四、[9 分] 设 $f'(x)$ 连续，求 $\int\dfrac{xf'(x)-(1+x)f(x)}{x^2e^x}dx$.

五、[9 分] 设 $(\cos y)^x = (\sin x)^y$ ，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

六、[10 分] 设 $y = x^3 \ln x$，求 $f^{(n)}(1)$，其中 $n > 3$。

七、[10 分] 设 $y = y(x)$ 是由方程组 $\begin{cases} x = 3t^2 + 2t + 3 \\ e^y \sin t - y + 1 = 0 \end{cases}$ 所确定的隐函数，求 $\left.\dfrac{d^2 y}{dx^2}\right|_{t=0}$.

八、[11 分] 设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的某领域内二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x + xf(x)}{x^3} = 0$，求

$$f(0), f'(0), f''(0) \text{ 及 } \lim_{x\to 0} \frac{f(x)+3}{x^2}.$$

九、[11 分] 设 $f(x)$ 连续，且 $\int_0^x tf(2x-t)dt = \dfrac{1}{2}\arctan x^2$，$f(1) = 1$，求 $\int_1^2 f(x)dx$。

十、[10 分]证明不等式：$e^{2x}(1-x) < 1+x$，$x > 0$

十一、[11 分] 设函数 $f(x)$ 在[0, 1]上二阶可导，且 $f(0) = f(1)$，试证：至少存在一个 $\xi \in (0,1)$，使

$$f''(\xi) = \frac{2f'(\xi)}{1-\xi}$$

十二、[12 分] 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有二阶连续导数，且 $f'(a) = f'(b) = 0$，证明：

在 (a,b) 内存在一点 ξ，使 $\int_a^b f(x)dx = (b-a)\cdot\dfrac{f(a)+f(b)}{2} + \dfrac{1}{6}(b-a)^3 f''(\xi)$