苏州科技学院

二〇〇七年攻读硕士学位研究生入学考试试题

学科、专业：数学学科基础数学专业 试题编号：613 试题名称：数学分析

请考生注意：试题解答务请考生做在专用“答题纸”上；
做在其它地方的解答将视为无效答题，不予评分。

一、本大题共九个小题，每小题 10 分，共 90 分。

1. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x + x\sin x)^{\frac{1}{x^2}}$.

2. 求由 $\begin{cases} x = 2t + |t| \\ y = 5t^2 + 4t|t| \end{cases}$ 所确定的函数 $y = f(x)$ 在 $x = 0$ 处的导数.

3. 计算不定积分 $\int \frac{\ln(1+e^{-x})}{1+e^x}dx$.

4. 设函数 $f(x)$ 定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上，$f'(0)$ 存在，且 $\forall x, y$，

   $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$.

   证明：$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上任意阶可导.

5. 设方程 $z^3 - 3xyz = a^3$，求隐函数的偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

6. 证明：$y = \sin\sqrt{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致连续.

7. 证明：若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$ 亦必绝对收敛.

8. 讨论瑕积分 $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}dx$ 的收敛性.

9. 设 $f(u)$ 为连续函数，c 为逐段光滑的封闭曲线．证明：

   $\oint_c f(x^2+y^2)(xdx + ydy) = 0$.

二、本大题共四个小题，每小题 15 分，共 60 分。

1. 设 $\{x_n\}$ 为任一数列，令 $y_n = x_{n-1} + 2x_n$，$n = 2,3,\ldots$．

   证明：数列 $\{y_n\}$ 收敛的充要条件是数列 $\{x_n\}$ 收敛.

2. 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上二次可微，且 $|f(x)| \le 1, |f''(x)| \le 1$．

   证明：$|f'(x)| \le 2$．

3. 计算第二型曲面积分 $J = \iint\limits_{\Sigma} z\,dxdy + y\,dzdx + x\,dydz$，

   其中 Σ 为圆柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 被 $z = 0$，$z = 3$ 所截取部分的外侧.

4. 证明：$\int_0^1 x^{-x} dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-n}$．