苏 州 科 技 学 院

二 00 九年攻读硕士学位研究生入学考试试题

学科、专业：基础数学　　　　试题编号：818　　试题名称：高等代数

请考生注意：试 题 解 答 务 请 考 生 做 在 专 用 “答题纸” 上；
做在其它地方的解答将视为无效答题，不予评分。

1.（20 分）设 $f(x)\in P[x]$，证明: $x\left|f(x)\right.$ 当且仅当 $x\left|f^k(x)\right.$，其中 k 为自然数.

2.（20 分）对参数 λ，讨论方程组 $\begin{cases}(1+\lambda)x_1+x_2+x_3=1\\ x_1+(1+\lambda)x_2+x_3=\lambda\\ x_1+x_2+(1+\lambda)x_3=\lambda^2\end{cases}$ 解的情况，在有解时求出解.

3.（20 分）设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，试讨论向量组 $\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\cdots,\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s$ 的线性相关性.

4.（20 分）设 $-1,4,-3$ 是 3×3 矩阵 A 的特征值，计算行列式 $\left|2A^2-3\mathrm{A}+5\mathrm{E}\right|$，其中 E 为 3 阶单位矩阵.

5.（20 分）求齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3-4x_4=0\\ x_1+5x_2+3x_3+3x_4=0\end{cases}$ 的解空间 W，并写出 W 在 R^4 中的正交补 $W^{\perp}$.

6.（20 分）设 A, B 都是正定矩阵，证明: AB 的特征值全大于零。

7.（20 分）设σ是n维线性空间V的线性变换且$\sigma^2 = \mathrm{I}$（I 为恒等变换），证明：

（1）σ的特征值为± 1.

（2）$V = V_1 \oplus V_{-1}$，其中V_1和V_{-1}分别是特征值 1 和-1 对应的特征空间.

8.（10 分）设P为一数域，$f(x), g(x) \in P[x]$，$d(x)$是$f(x)$与$g(x)$的最大公因式，σ是数域P上的线性空间V的线性变换，证明：

$\ker d(\sigma) = \ker f(\sigma) \cap \ker g(\sigma)$，其中ker表示线性变换的核。