南京财经大学

2012 年硕士研究生入学考试初试试题（ A 卷）

科目代码： 615 科目名称： 数学分析 满分： 150 分

注意：①认真阅读答题纸上的注意事项；②所有答案必须写在答题纸上，写在本试题纸或草稿纸上均无效；③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回！

一、计算题 （共 5 题，每题 8 分，共计 40 分）

（1） 设 $z = f(x+y, x-y, \frac{x}{y})$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$。

（2） 将函数 $f(x) = x^2 \quad (-\pi < x < \pi)$ 展开为傅里叶级数。

（3） 求极限 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 - (\arctan x)^2}{\tan x (\arcsin x)^3}$。

（4） 在 $(-1,1)$ 内求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^{n+1}$ 的和函数，并且求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ 的和。

（5） 求曲线积分 $\int_L (z-y)\,dx + (x-z)\,dy + (y-x)\,dz$，其中 L 是以 $A(a,0,0)$，$B(0,a,0)$，和 $C(0,0,a)$ 为顶点的三角形沿 $ABCA$ 的方向。

二、 （共 1 题，共计 12 分）

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上非负连续，$f(1) = 0$，证明：存在 $c \in (0,1)$，使得 $f(c) = \int_0^c f(t)\,dt$。

三、 （共 1 题，共计 12 分）

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续导函数， $f(0) = 0$，证明：

$$\int_0^1 [f(x)]^2 dx \le \frac{1}{2} \int_0^1 [f'(x)]^2 dx。$$

四、（共 1 题，共计 12 分）

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上无界，证明：存在 $x_0 \in [a,b]$，使得 $f(x)$ 在点 x_0 的任意邻域内无界。

五、（共 1 题，共计 12 分）

证明：函数$F(\alpha)=\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^{\alpha}}dx$在$(0,+\infty)$内连续。

六、（共 1 题，共计 12 分）

设连续函数$f(x)$在$[1,+\infty)$上单调减少且$f(x)>0$，若$x_n=\sum_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)dx,$

证明：数列$\{x_n\}$收敛。

七、（共 1 题，共计 12 分）

设$u=u(x,y)$具有二阶连续偏导数，证明：存在常数a,b使得在变换$s=x+ay$，$t=x+by$下，可将微分方程$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$化为$\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial t}=0$。

八、（共 1 题，共计 12 分）

设$f(x)$在$[-1,1]$上有三阶导数，且$f(-1)=f'(0)=0,\ f(1)=1$，证明：存在$\xi\in(-1,1)$，使得$f'''(\xi)=3$。

九、（共 1 题，共计 12 分）

设$f(x,y,z)$是R^3上的连续函数，且满足$\lim\limits_{r\to+\infty}f(x,y,z)=+\infty$，其中$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则一定存在$(x_0,y_0,z_0)\in R^3$，使得$f(x_0,y_0,z_0)=\inf\limits_{(x,y,z)\in R^3}f(x,y,z)$。

十、（共 2 题，共计 14 分）

设$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n+x}$，（1）证明：$f(x)$在$[0,+\infty)$上可导，且一致连续；（2）证明：反常积分$\int_0^{+\infty}f(x)dx$发散。