

1999 年南京航空航天大学常微分方程考研试题

考研加油站收集整理 <http://www.kaoyan.com>

1. 解下列方程 (每小题 7 分):

$$(1) \frac{dy}{dx} = 2\sqrt{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}.$$

$$(2) \frac{dy}{dx} = \frac{2}{x}y + \frac{1}{2}x.$$

$$(3) 2(3xy^2 + 2x^3)dx + 3(2x^2y + y^2)dy = 0.$$

$$(4) y = y' + \ln y'.$$

$$(5) x''' - x = \cos t.$$

2. 解答以下各题 (每小题 9 分):

(1) 用幂级数解法求解

$$\begin{cases} x'' - tx = 0 \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$$

(2) 求方程组  $X' = AX$  的通解 (或基解矩阵), 其中

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 2 & -3 & -2 \\ 4 & -2 & -6 \end{bmatrix}.$$

(3) 已知下列方程的一个解  $y_1 = x$ , 求其通解

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0.$$

3. (1) 设函数  $f(x, y)$  在矩形闭区域  $R$  上有连续的偏导数, 问方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

是否满足解的存在唯一性定理的条件, 并证明你的结论. (10分)

(2) 设  $a < t_0 < b$ ,  $X_1(t), X_2(t), \dots, X_m(t)$  是方程组

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X$$

的  $m$  个解, 其中  $n \times n$  矩阵  $A(t)$  在  $(a, b)$  上连续. 证明这  $m$  个解在  $(a, b)$  上线性相关当且仅当  $X_1(t_0), X_2(t_0), \dots, X_m(t_0)$  线性相关. (10分)

4. 若函数  $\varphi(t)$  有性质

(i)  $\varphi'(t) = \varphi(t).$

(ii)  $\varphi(0) = 1.$

则  $\varphi(t) = e^t$ . 试用逐步逼近法证明这一结论.

(10分)

5. 讨论下列方程组的零解的稳定性, 其中  $\alpha > 0$ , 为常数:

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - xy^2 \\ \dot{y} = 2x^2 y. \end{cases}$$

(8分)