1999 年南京航空航天大学数学分析考研试题

(1) a) 求 $\frac{d}{dt}\int_{t^2}^{t^3}\sin(xt)dx$； (10')

b) 设 $u=f(x,y,z)$，$y=\varphi(x,t)$，$t=\psi(x,z)$ 均有连续偏导数，试求 $\frac{\partial u}{\partial x}$（用 f,φ,ψ 的偏导数表示）。 (10')

(2) a) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\cos\frac{k}{n}$； (10')

b) 设 C_t 为圆周 $x^2+y^2=t$ $(t>0)$，取正向，求 $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\oint_{C_t}x^3dy-y^3dx}{\mathrm{ch}\,t-\cos t}$.

(3) a) 设 $\Sigma=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1\right\}$，取外侧，试求

$$\iint\limits_{\Sigma}Ax^2dydz+By^2dzdx+Cz^2dxdy;\qquad(15')$$

b) 设曲线 C 是顶点为 $A(1,0,0)$，$B(0,1,0)$ 与 $C(0,0,1)$ 的三角形边界，且自坐标原点看去，C 取顺时针方向，试求

$$\oint_C(y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz.\qquad(15')$$

(4) a) 证明函数列 $\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\,\middle|\,n=1,2,\cdots\right\}$ 在 $x\in[0,1]$ 上对于 n 单调增大；

b) 证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+x)^n}{n^{n+1}}$ 在$[0,1]$上一致收敛。 (5′)

(5) 证明：若$f(x)$在$[0,1]$上二阶可导，则$\exists\,\xi\in(0,1)$，使得

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(f(0)+f(1)\right)-\frac{1}{8}f''(\xi).$$ (5′)

(6) a) $\forall\,\alpha\in(0,1)$，讨论广义积分$\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha\sin x}{x+10}dx$的敛散性（注意绝对收敛、条件收敛或发散）；

b) 讨论$\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha\sin x}{x+10}dx$对参数$\alpha$在$(0,1)$内的一致收敛性。(5′)

(7) 设$\alpha>0$，试确定函数$f(x)=x^\alpha\ln x$在$(0,+\infty)$内一致连续的参数α的范围。 (5′)

(8) 设$f(x)$在$R^1=(-\infty,+\infty)$内处处连续。令$\varphi(x)=\int_0^x f(t)dt$，且满足：$\forall\,\lambda\in R^1$，若集合$A_\lambda=\{x\in R^1\mid\varphi(x)\le\lambda\}$非空，则必为有界集。试问：$f(x)$在$R^1$内是否必有零点？若肯定，请给出证明；若否定，请举出反例。 (5′)