南京航空航天大学

二〇〇一年硕士研究生入学考试试题

考试科目： **数学分析**

说　明：答案一律写在答题纸上

（1）a）已知 $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$；（12 分）

b）已知 $F(t)=\int_{t^2}^{t^3}\dfrac{\sin xt}{x}dx$，求 $F'(t)$。（10 分）

（2）a）设 Σ 是柱体 $\Omega=\{(x,y,z)|(x-1)^2+(y-1)^2\le 1,\ \ 0\le z\le 2\}$ 的表面外侧，试求 $I=\iint\limits_{\Sigma}(x^2+yz)dydz+(y^2+zx)dzdx+(z^2+xy)dxdy$；

（13 分）

b）求由抛物线 $y^2=px$，$y^2=qx\ (0<p<q)$ 及双曲线 $xy=a$，$xy=b\ (0<a<b)$ 所围平面区域 D 的面积 A。（10 分）

（3）a）设 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，试证：

$$\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)dx;$$ （10 分）

b）籍 a）求和式极限 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k\sin\frac{k\pi}{n}}{1+\cos^2\frac{k\pi}{n}}$ （10 分）

（4）设 $f(x,t)$ 在 $D=\{(x,t)|0\le x<+\infty,\ \alpha\le t\le\beta\}$ 上连续，令

$u_n(t)=\int_{n-1}^{n}f(x,t)dx,\quad n=1,2,\cdots$，试证明：

a）若 $\int_0^{+\infty}f(x,t)dx$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续；（10 分）

b）若 $f(x,t)$ 在 D 上非负，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛，则

$\int_0^{+\infty}f(x,t)dx$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续。（5 分）

（5）设 $f(x)=x^{\alpha},\ x\in[1,+\infty),\ \alpha\in(0,1)$ 为定数。

a）利用微分中值定理证明：$\exists C\ge 1$，使得

当 $x_1,x_2\ge C$ 时，有 $\left|x_1^{\alpha}-x_2^{\alpha}\right|\le\left|x_1-x_2\right|$（7 分）

b）证明 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致连续。（7 分）

（6）设数列 $\{a_n\}$ 为 $1,2,2,3,3,3,4,4,4,4,\cdots$

试讨论极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n^{\alpha}}$，即对 $\alpha(\in R^1)$ 进行分类，求出所有可能的极限，包括 ∞。（6 分）

试题编

一、单

1、

说起来

A、

2、

并在这

A、

C、

3、共产

A、

C、

4、对国

A、

C、

5、有数

A、

C、

6、三湾

A、

7、中国

的文件

A、《

C、《