南京航空航天大学

二〇〇一年硕士研究生入学考试试题

考试科目：概率论与数理统计

说　明：答案一律写在答题纸上

1.（13分）盒中有2个红球3个白球，从中一个一个地随机取出，直到红球被全部取出而停止取球。记X为所需的取球次数，试求X的分布列和数学期望。

2.（15分）设二维随机向量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2\lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}, & 0<x<y \\ 0, & \text{其它}\end{cases}\quad (\lambda>0\text{为常数})$$

试求:（1）在$Y=y(y>0)$下，X的条件概率密度$g(x|y)$；

（2）在$Y=y(y>0)$下，X的条件均值$E(X|Y=y)$以及条件均值$E[\lambda X(e^{\lambda Y}-1)|Y=y]$。

3.（10分）设C为常数，证明：若随机序列$\{X_n, n\ge 1\}$依分布收敛于C，则$\{X_n\}$必依概率收敛于C。

4.（10分）设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为X的一个样本，$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$。又$X_{n+1}\sim N(\mu,\sigma^2)$，且与样本（$X_1,X_2,\cdots,X_n$）相互独立。试求统计量$\frac{X_{n+1}-\overline{X}}{S}\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$的抽样分布。

5.（15分）设总体X在$[0,\theta]$上服从均匀分布，其中$\theta>0$为未知参数．$X_1,X_2,\cdots,X_n$为X的一个样本．

（1） 试求θ的极大似然估计量$\hat{\theta}$；

（2） 证明$\hat{\theta}$不是θ的无偏估计．

（注：在第6，7题中，要用到分位点概念．本试卷要求一律采用上α分位点，其定义如下：设随机变量ξ，实数$0<\alpha<1$，满足$P\{\xi>\lambda_\alpha\}=\alpha$的实数$\lambda_\alpha$称为$\xi$的分布的上$\alpha$分位点．）

6.（10分）设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$（其中$\sigma>0$已知），$X_1,X_2,\cdots,X_n$为X的一个样本．试证明：在参数μ的形如$[\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha_1},\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha_2}]$的置信度为$1-(\alpha_1+\alpha_2)$ $(\alpha_1+\alpha_2=\alpha,0<\alpha_1<0.5,0<\alpha_2<0.5)$的置信区间中，当$\alpha_1=\alpha_2=\frac{\alpha}{2}$时，区间长度最短（其中$z_\alpha$为$N(0,1)$分布的上$\alpha$分位点）．

7.（12分）设总体$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_{n_1}$为$X$的一个样本．总体$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，$Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}$为$Y$的一个样本，两组样本相互独立，参数 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2$均未知．对给定显著水平$\alpha(0<\alpha<1)$，试给出下列检验问题的显著性检验方法：

$$H_0:2\sigma_1^2=\sigma_2^2,\qquad H_1:2\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$$

8.（15 分）设 $\varphi(x)$，$\Phi(x)$ 分别为 $N(0,1)$ 分布的概率密度和分布函数.

（1） 若随机变量 $X \sim N(a,\sigma^2)$，试证明:

$$E|X| = 2\sigma\varphi(\frac{a}{\sigma}) + 2a\Phi(\frac{a}{\sigma}) - a \text{；}$$

（2） 若随机变量 ξ_1,ξ_2 独立，$\xi_i \sim N(a_i,\sigma_i^2), i=1,2$ ，试证明:

$$E[\max(\xi_1,\xi_2)] = a_2 + \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\,\varphi\left(\frac{a_1-a_2}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\right) + (a_1-a_2)\Phi\left(\frac{a_1-a_2}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\right).$$

一 完一