3.5;

更由

南京航空航天大学

二OO四年硕士研究生入学考试试题

考试科目: 高等代数

说　明: 答案一律写在答题纸上,写在试卷上无效

1. (1) 设 $f(x)=x^7+2x^6-6x^5-8x^4+19x^3+9x^2-22x+8$，$g(x)=x^2+x-2$，将 $f(x)$ 表示成 $g(x)$ 的方幂和，即将 $f(x)$ 表示成

$$f(x)=c_k(x)g(x)^k+c_{k-1}(x)g(x)^{k-1}+\cdots+c_1(x)g(x)+c_0(x)$$

其中次 $(c_i(x))<$ 次 $(g(x))$ 或 $c_i(x)=0, i=0,1,\cdots,k$。(15 分)

(2) 设 $d(x)=(f(x),g(x))$，$f(x)\mid h(x)$ 和 $g(x)\mid h(x)$。证明: $f(x)g(x)\mid d(x)h(x)$。(15 分)

2. V 是 n 维线性空间，$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的基，V 的线性变换 T 定义为

$$\begin{cases} T\varepsilon_i=\varepsilon_{i+1}, & i=1,2,\cdots,n-1 \\ T\varepsilon_n=0 \end{cases}$$

(1) 求 T 在基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 下的矩阵 A; (7 分)

(2) 求象空间 (或值域) $T(V)$ 和核空间 $N(T)$ 的维数; (6 分)

(3) 证明: $T^n=0$，而 $T^{n-1}\neq 0$; (7 分)

(4) 若另一个 V 的线性变换 S 满足 $S^n=0$，而 $S^{n-1}\neq 0$，证明: 存在 V 的一组基使 S 在该组基下的矩阵也是 A。(10 分)

3. 设 $A=\begin{bmatrix} 3 & 21 & 0 & 9 & 0 \\ 1 & 7 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 14 & 0 & 6 & 1 \\ 6 & 42 & -1 & 13 & 0 \end{bmatrix}$

(1) 利用初等变换将 A 化为上梯形矩阵，并求 A 之秩; (11 分)

(2) 若 V 是由 A 的行向量生成的子空间，求 V 的一组基; (5 分)

(3) 求向量$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\in V$的条件（用$x_1,x_2,x_3,x_4,x_5$之间的关系表示）；（7 分）

(4) 求V的正交补空间$V^{\perp}$的基。（7 分）

4. 设$A\in C^{n\times n}$，如果A有n个标准正交特征向量就称A为正规矩阵，若A是正规矩阵。证明：

(1) $A+\lambda I$是正规矩阵，其中$\lambda\in C$，I为单位矩阵；（6 分）

(2) $A^H A=AA^H$，其中H表示共轭转置；（7 分）

(3) 对任何$x\in C^n$，Ax与$A^H x$的长度必相等；（7 分）

(4) A的任一特征向量都是A^H的特征向量。（10 分）

5. 设V是n维欧氏空间，W是V的m维子空间，$m<n$，又$a_1,a_2,\cdots,a_m$是W中的非 0 正交向量组。证明：

(1) $a_1,a_2,\cdots,a_m$线性无关；（8 分）

(2) 若$b\in W$满足$(b,a_i)=0,i=1,2,\cdots,m$，则$b=0$；（8 分）

(3) 对任何$b\in V$恒有$\sum_{i=1}^{m}\frac{(b,a_i)^2}{(a_i,a_i)}\le\|b\|^2$。（14 分）