

南京航空航天大学

## 二〇〇六年硕士研究生入学考试试题

考试科目: 高等数学 (单)

说明: 答案一律写在答题纸上, 写在试卷上无效

一、填空题 ( $5 \times 5' = 25'$ )

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{4n^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}} \right) =$  \_\_\_\_\_

2.  $x \rightarrow 0$  时  $x - \sin x \cos x \cos 2x$  与  $cx^k$  等价无穷小, 则  $c =$  \_\_\_\_\_

3. 指出函数  $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x-1}}, & x > 0 \\ \ln(1+x), & -1 < x \leq 0 \end{cases}$  的间断点及其类型 \_\_\_\_\_

4. 函数  $u = e^{xyz} + x^2 + y^2$  在点  $P(1, 1, 1)$  处沿曲线  $x=t, y=2t^2-1, z=t^2$  在  $P$  处的切线方向的方向导数为 \_\_\_\_\_

5. 曲线  $y = \frac{x^3}{x^2+2x-3}$  的斜渐近线方程为 \_\_\_\_\_

二、选择题 ( $5 \times 5' = 25'$ )

6. 设对任意  $x$  有  $f(1+x) = af(x)$ , 且  $f'(0) = b$ , 其中  $a, b$  为非零常数, 则 ( )

- (A)  $f(x)$  在  $x=1$  处不可导  
 (B)  $f(x)$  在  $x=1$  处可导且  $f'(1) = a$   
 (C)  $f(x)$  在  $x=1$  处可导且  $f'(1) = b$   
 (D)  $f(x)$  在  $x=1$  处可导且  $f'(1) = ab$

7. 设  $z = f(x, y)$  在点  $(x, y)$  处不连续, 则  $f(x, y)$  在该点处 ( )

- (A) 必无定义  
 (B) 极限必不存在  
 (C) 偏导数必不存在  
 (D) 必不可微

8.  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$ ,  $f(x)$  为  $D$  上正值连续函数, 则  $\iint_D \frac{2\sqrt{f(x)} + 4\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} d\sigma = ( )$

- (A)  $3\pi$   
 (B)  $4\pi$   
 (C)  $6\pi$   
 (D)  $8\pi$

9. 在  $(-\infty, +\infty)$  内方程  $|x|^{\frac{1}{4}} + |x|^{\frac{1}{2}} - \cos x = 0$  ( )

- (A) 无实根  
 (B) 有且仅有一个实根  
 (C) 有且仅有二个实根  
 (D) 有无穷多个实根

10. 下列级数收敛的是( )

(A)  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \frac{1}{n})$

(B)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{\pi n}{3}$

(C)  $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

(D)  $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)$

### 三、计算题(6×8'=48')

11. 求极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x \operatorname{arctg} \frac{1}{x})^{x^2}$

12. 设  $y=f(x,t)$ , 而  $t$  是由方程  $F(x,y,t)=0$  所确定的  $x,y$  的函数, 其中  $f, F$  都具有二阶连续偏导数, 求  $\frac{dy}{dx}$

13. 计算  $\iint_D x(\sin y + 3y^2) d\sigma$ , 其中  $D = \{(x,y) | y \leq x, x^2 + y^2 \leq 1\}$

14.  $L: \begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases}$  从  $(0,0)$  到  $(2\pi,0)$ , 计算曲线积分  $\int_L (2xy + 3x \sin x) dx + (x^2 - ye^y) dy$

15. 写出  $f(x)=\operatorname{arctg} x$  的马克劳林展式进而求  $f^{(n)}(0)$

16. 作变换  $t=\operatorname{tg} x$ , 改写方程  $\cos^4 x \frac{d^2 y}{dx^2} + 2\cos^2 x(1-\sin x \cos x) \frac{dy}{dx} + y = \operatorname{tg} x$  为  $y$  关于  $t$  的函数的方程, 进而求出上方程的通解

### 四、应用题(2×14'=28')

17. 设过曲线  $\begin{cases} x=\cos^n t \\ y=\sin^n t \end{cases} (n>2, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2})$  上的点的切线与二坐标交于点  $P$  和点  $Q$ ,

(1) 问  $n$  为何值时线段  $PQ$  的长度是一个与  $t$  无关的常数?

(2) 对于上述  $n$  求出曲线与两坐标轴所围图形面积。

18. 已知  $z=f(x,y)$  的全微分  $dz=(3x^2-y)dx+(3y^2-x)dy$  且  $f(0,0)=1$

求  $f(x,y)$  在  $D=\{(x,y) | x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$  上的最大值、最小值。

### 五、证明题(3×8'=24')

19. 设  $f(x)$  在  $[0,1]$  上连续, 在  $(0,1)$  内可导且  $3 \int_{\frac{2}{3}}^1 f(x) dx = f(0)$ , 求证在  $(0,1)$  内存在  $c$  使  $f'(c)=0$ 。

20. 设  $P>0$  求证  $\frac{P}{P+1} < \int_0^1 \frac{dx}{1+x^P} < 1$

21. 设  $f(x)$  在  $(x_0-\delta, x_0+\delta)$  内有  $n$  阶连续导数, 且  $f^{(k)}(x_0)=0, k=2,3,\dots,n-1, f^{(n)}(x_0) \neq 0$ ,

当  $0 < |h| < \delta$  时  $f(x_0+h)-f(x_0)=hf'(x_0+\theta h), 0 < \theta < 1$  求证  $\lim_{h \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{n-1}$