南京航空航天大学
二〇〇八年硕士研究生入学考试试题

考试科目：数学分析

说　　明：所有试题答案必须写在答题纸上，答案写在试卷上无效

1. 设 $x_0=2$， $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{2}{x_n}), n=0,1,2,\cdots$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$． （13 分）

2. 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续，而且对 I 中任何不同的两点 $x_1,x_2\in I$ 有 $f(x_1)\neq f(x_2)$，求证 $f(x)$ 在 I 上为严格单调函数． （13 分）

3. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处有任意阶导数 $f^{(n)}(0)=0$，求 $g'(x)$，其中

$$g(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$ （13 分）

4. 在以下两种情况下分别证明：曲线 $y=f(x)$ 位于其任一切线之上方，且与切线有唯一公共点．

（1）设 $y=f(x)$ 二阶可导且处处有 $f''(x)>0$．

（2）设 $y=f(x)$ 一阶可导且导函数 $f'(x)$ 严格单调递增． （13 分）

5. 讨论积分 $\int_0^2 \frac{\ln(1+x)}{x^p}dx$ 的敛散性． （13 分）

6. 设 $f(x)$ 为 $[0,2\pi]$ 上的单调递减函数，证明：对任何正整数 n，成立

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx\geq 0.$$ （13 分）

7. 设二元函数 $f(x,y)$ 在整个 xy 平面上有连续偏导数 f_x 和 f_y，而且它们不同时为零． 若方程 $f(x,y)=0$ 有解，证明该方程有无穷多个解． （12 分）

8. 求以下两个几何体的体积，试分析两者的关系。

V_1：由锥体 $z \ge \sqrt{x^2+y^2}\cot\beta$ 和球体 $x^2+y^2+(z-a)^2 \le a^2$ 的公共部分确定，其中 $a>0,\ 0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ 均为常数.

V_2：由柱面 $z=2a\cos y$ 与平面 $z=0,\ y=0,\ y=\beta,\ x=0,\ x=2\pi$ 围成.　　（12 分）

9. 设 $\Omega_1 \subset \Omega_2$ 是平面上两个有界单连通开区域，$D=\overline{\Omega_2}\setminus\Omega_1$，举例说明存在表达式 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$，它在 D 上有原函数 $u(x,y)$，但 $u(x,y)$ 在 Ω_2 上可能不存在.　（12 分）

10. 计算 $\iint_\Sigma (xy+yz+zx)dS$，$\Sigma$ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=2ax$ 所截部分.　（12 分）

11. 判断函数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n$ 在 $x\in[0,1]$ 上是否一致收敛.　（12 分）

12. 证明：在平面的有界闭子集上，有限覆盖定理成立.　（12 分）

南京航空航天大学

二〇〇八年硕士研究生入学考试试题参考答案

考试科目：数学分析

1. 设 $x_0=2$，$x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{2}{x_n}),n=0,1,2,\cdots$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解 $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{2}{x_n})\geq\sqrt{2},n=0,1,2,\cdots$.　（3 分）

由归纳法又可证得 $x_{n+1}\leq x_n,n=0,1,2,\cdots$.　（6 分）

从而 $\{x_n\}$ 收敛.　（9 分）

不妨记 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，则有 $A=\frac{1}{2}(A+\frac{2}{A})$，$A=\sqrt{2}$.

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2}$.　（13 分）

2. 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续，而且对 I 中任何不同的两点 $x_1,x_2\in I$ 有 $f(x_1)\neq f(x_2)$，求证 $f(x)$ 在 I 上为严格单调函数.

证 设 $f(x)$ 在 I 上不严格单调，则存在 $x_1,x_2,x_3\in I,\ x_1<x_2<x_3$ 满足

$f(x_1)\leq f(x_2),f(x_2)\geq f(x_3)$，或 $f(x_1)\geq f(x_2),f(x_2)\leq f(x_3)$　（6 分）

令 $c\in[\max\{f(x_1),f(x_3)\},f(x_2)]$，或 $c\in[f(x_2),\min\{f(x_1),f(x_3)\}]$

则由连续函数的介值定理，在区间 $[x_1,x_2]$ 和 $[x_2,x_3]$ 上各有一点 x_1',x_2' 使 $f(x_1')=f(x_2')$．矛盾！

故 $f(x)$ 在 I 上为严格单调函数.　（13 分）

3． 已知函数 $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处有任意阶导数 $f^{(n)}(0)=0$，求 $g'(x)$，其中

$$g(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}\sin\frac{1}{x} & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

解 已知 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=0$

$$\therefore\ g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}\sin\frac{1}{x}}{x}=0\,. \qquad \text{（7 分）}$$

对 $\forall x\neq 0$， $g'(x)=\dfrac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}\sin\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x^2}}\cos\dfrac{1}{x}$. （13 分）

4．在以下两种情况下分别证明：曲线 $y=f(x)$ 位于其任一切线之上方，且与切线有唯一公共点．

（1）设 $y=f(x)$ 二阶可导且处处有 $f''(x)>0$.

（2）设 $y=f(x)$ 一阶可导且导函数 $f'(x)$ 严格单调递增．

证 不妨假设 (x_0,y_0) 为曲线 $y=f(x)$ 上的任意一点，则在点 (x_0,y_0) 处的切线方程为

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\,.$$

（1）由带 **Lagrange** 余项的 **Taylor** 展开公式，可得

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2\,.$$

由于处处有 $f''(x)>0$，从而当 $x\neq x_0$ 时，得到

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)<f(x)\,,$$

而且 (x_0,y_0) 为唯一公共点． （7 分）

（2）由 **Lagrange** 中值定理和 $f'(x)$ 严格单调递增，可得

$$\begin{aligned}&f(x)-(f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0))=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)\\&=f'(\xi)(x-x_0)-f'(x_0)(x-x_0)=(f'(\xi)-f'(x_0))(x-x_0)>0\end{aligned}$$

其中 $x\neq x_0$，ξ 夹在 x,x_0 之间．即

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)<f(x)\,,$$

而且 (x_0,y_0) 为唯一公共点． （13 分）

5．讨论积分 $\int_0^2\dfrac{\ln(1+x)}{x^p}dx$ 的敛散性．

解 当 $p>1$ 时，$x=0$ 是瑕点。 （3 分）

令 $x\to 0^+$，则 $\dfrac{\ln(1+x)}{x^p}\sim\dfrac{1}{x^{p-1}}$， （6 分）

从而当 $1<p<2$ 时，积分收敛， $p\geq 2$ 时，积分发散． （9 分）

若 $p \le 1$，该积分为定积分． （11 分）

故当 $p<2$ 时，积分收敛， $p \ge 2$ 时，积分发散． （13 分）

6. 设 $f(x)$ 为 $[0,2\pi]$ 上的单调递减函数，证明：对任何正整数 n，成立

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx \ge 0 .$$

证 容易知道 $\int_0^{2\pi} \sin nx dx = 0$．从而得到

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx = \int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx - f(2\pi)\int_0^{2\pi} \sin nx dx$$

$$= \int_0^{2\pi} [f(x)-f(2\pi)]\sin nx dx$$ （6 分）

又对任意的 $x \in [0,2\pi]$，有 $f(x) \ge f(2\pi)$．由积分第二中值定理可知，存在 $t \in [0,2\pi]$，使得

$$\int_0^{2\pi} [f(x)-f(2\pi)]\sin nx dx = [f(0)-f(2\pi)]\int_0^t \sin nx dx$$

$$= [f(0)-f(2\pi)]\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)\Bigg|_0^t = [f(0)-f(2\pi)]\frac{(1-\cos nt)}{n} \ge 0.$$

因此，对任何正整数 n，成立 $\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx \ge 0$． （13 分）

7. 设二元函数 $f(x,y)$ 在整个 xy 平面上有连续偏导数 f_x 和 f_y，而且它们不同时为零． 若方程 $f(x,y)=0$ 有解，证明该方程有无穷多个解．

证 设方程 $f(x,y)=0$ 有解 (x_0,y_0)，且 f_{x_0}，f_{y_0} 不同时为零，则由隐函数定理，存在邻域 $U(x_0,y_0)$，在其上存在函数 $y=g(x)$ 满足：$y_0=g(x_0)$ 且 $f(x,g(x))=0$，或存在函数 $x=h(y)$ 满足：$x_0=h(y_0)$ 且 $f(h(y),y)=0$． （8 分）

这样曲线 $y=g(x)$ 或曲线 $x=h(y)$ 上所有的点都是 $f(x,y)=0$ 的解．即该方程有无穷多个解．（12 分）

8. 求以下两个几何体的体积，试分析两者的关系。

V_1：由锥体 $z \ge \sqrt{x^2+y^2}\cot\beta$ 和球体 $x^2+y^2+(z-a)^2 \le a^2$ 的公共部分确定，其中 $a>0,\ 0<\beta<\frac{\pi}{2}$ 均为常数.

V_2：由柱面 $z=2a\cos y$ 与平面 $z=0,\ y=0,\ y=\beta,\ x=0,\ x=2\pi$ 围成.

解 利用球坐标变换，在 (r,ϕ,θ) 坐标系内，V_1 对应几何体

V_1'：$\{(r,\phi,\theta) \mid 0 \le r \le 2a\cos\phi, 0 \le \phi \le \beta, 0 \le \theta \le 2\pi\}$

所以 $V_1=\iiint\limits_V dV=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\beta}d\phi\int_0^{2a\cos\phi}r^2\sin\phi dr=\frac{4}{3}\pi a^3(1-\cos^4\beta)$. （6 分）

$V_2=2\pi\int_0^{\beta}2a\cos ydy=4a\pi\sin\beta$. （10 分）

由上面的计算过程可以看出，在球坐标变换下，几何体 V_1 转化成 V_2，只是体积微元相差一个系数 $r^2\sin\phi$ （12 分）

9． 设 $\Omega_1\subset\Omega_2$ 是平面上两个有界单连通开区域，$D=\overline{\Omega}_2\setminus\Omega_1$，举例说明存在表达式 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$，它在 D 上有原函数 $u(x,y)$，但 $u(x,y)$ 在 Ω_2 上可能不存在.

解 令 $P(x,y)=\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$, $Q(x,y)=\frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$， 则

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\frac{xdx+ydy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}=d(-\frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)}}).$$ （8 分）

可见在 $0<r^2\le x^2+y^2\le R^2$ 上存在 $u(x,y)=-\frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$，而在整个 $x^2+y^2\le R^2$ 上 $u(x,y)$ 并无定义. （12 分）

10. 计算 $\iint_\Sigma(xy+yz+zx)dS$，Σ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=2ax$ 所截部分.

解 在 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 上，$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{2}$，$dS=\sqrt{2}dxdy$. （3 分）

因此，$\iint_\Sigma(xy+yz+zx)dS=\iint\limits_{x^2+y^2\le 2ax}(xy+y\sqrt{x^2+y^2}+x\sqrt{x^2+y^2})\sqrt{2}dxdy$ （6 分）

$$=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}(r^2\cos\theta\sin\theta+r^2\sin\theta+r^2\cos\theta)rdr$$ （8 分）

$$=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta\sin\theta+\sin\theta+\cos\theta)d\theta\int_0^{2a\cos\theta}r^3dr$$

$$=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta\sin\theta+\sin\theta+\cos\theta)\frac{r^4}{4}\Big|_0^{2a\cos\theta}d\theta$$

$$=4\sqrt{2}a^4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos^5\theta\sin\theta+\cos^4\theta\sin\theta+\cos^5\theta)d\theta$$

$$=8\sqrt{2}a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 d\theta=8\sqrt{2}a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\theta)^2d\sin\theta=\frac{64\sqrt{2}}{15}a^4.$$ （12 分）

11． 判断函数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n$ 在 $x\in[0,1]$ 上是否一致收敛.

解 设 $a_n(x)=(1-x)x^n$，$b_n(x)=(-1)^n$． （2 分）

则对任何 $x\in[0,1]$，$a_n(x)$ 关于 n 单调. （4 分）

$a_n'(x)=nx^{n-1}-(n+1)x^n \overset{令}{=\!=} 0$，得 $(0,1)$ 内唯一驻点 $x_n=\dfrac{n}{n+1}$．易见 $a_n(x)$ 在点 $x_n=\dfrac{n}{n+1}$ 取最大

值 $a_n\left(\dfrac{n}{n+1}\right)=\left(1-\dfrac{n}{n+1}\right)\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n=\dfrac{1}{n+1}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^n$．

于是在 $[0,1]$ 上，$|a_n(x)|=a_n(x)\le\dfrac{1}{n+1}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^n\to 0$，$(n\to\infty)$．

即 $\{a_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于零. （8 分）

又对任何 $x\in[0,1]$ 和任何 n，$\left|\sum_{k=0}^{n}b_n(x)\right|\le 2$． （10 分）

由 *Dirichlet* 判别法，级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛. （12 分）

12． 证明：在平面的有界闭子集上，有限覆盖定理成立.

证 设 $\mathbf{S}$ 是 $\Re^2$ 中的有界闭集，$\{O_\alpha\,|\,O_\alpha 为开邻域\}$ 是 $\mathbf{S}$ 的一族开覆盖，假定 $\mathbf{S}$ 不能被 $\{O_\alpha\}$ 中有限个覆盖。可设 $\mathbf{S}\subset\Delta=[a,b]\times[c,d]$． （2 分）

将 Δ 等分成四个小矩形，则在其中至少有一个小矩形，$\mathbf{S}$ 于它的交不能被 $\{O_\alpha\}$ 中有限个覆盖．记此交集为 $\mathbf{S}_1$．

依次四等分下去，可得一串闭集套 $\mathbf{S}\supseteq\mathbf{S}_1\supseteq\cdots\supseteq\mathbf{S}_n\supseteq\cdots$

其中的每一个都不能被 $\{O_\alpha\}$ 中有限个覆盖，但 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(\mathbf{S}_n)=0$． （8 分）

由 $\mathbf{S}_n$ 的闭性可知，存在一点 $p\in\mathbf{S}_n\subseteq\mathbf{S}$, $n=1,2,\cdots$． （10 分）

这样，在 $\{O_\alpha\}$ 中可找到一个 O_{α_0}，使 $p\in O_{\alpha_0}$．

由于 O_{α_0} 是开集，可找到充分大的 n_0，使 $p\in\mathbf{S}_{n_0}\subset O_{\alpha_0}$．

与 $\mathbf{S}_n$ 中每一个都不能被 $\{O_\alpha\}$ 中有限个覆盖矛盾。证毕. （12 分）