试题编号：311　　试题名称：高等数学

注意：答题一律答在答题纸上，答在草稿纸或试卷上一律无效

一 选择题（每题 4 分，共 40 分）

1 设函数 $f(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$ 在其定义域上(　　　　)

A 是周期函数　　　　B 是偶函数且是增函数

C 是奇函数且是减函数　　　　D 是奇函数且是增函数

2 当 $x\to 0$ 时,下列四个无穷小中, 哪一个是比其它三个更高阶的无穷小量(　　　　)

A $\ln(1-x^2)$　　　　B $x\tan x$

C $1-\cos(x^2)$　　　　D $e^{x^2}-1$

3 设 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$ 则 $f(x)$在点$x=0$处（　　　　）

A $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在.　　　　B $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 存在, 但 $f(x)$在点$x=0$不连续.

C $f(x)$在点$x=0$连续但不可导.　　　　D $f'(0)$ 存在.

4 A,B 是 n 阶方阵，则下列结论成立的是（　　　　）

A $AB\neq 0 \Leftrightarrow A\neq 0$ 且 $B\neq 0$　　　　B $|A|=0 \Leftrightarrow A=0$

C $|AB|=0 \Leftrightarrow |A|=0$ 或 $|B|=0$　　　　D $A=E \Leftrightarrow |A|=1$

5 设 η_1,η_2 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的两个不同的解向量，ξ_1,ξ_2 是其导出组 $Ax=0$ 的基础解系，k_1,k_2 为任意常数，则 $Ax=b$ 的通解为（　　　　）

A $k_1\xi_1+k_2\xi_2+\dfrac{\eta_1-\eta_2}{2}$　　　　B $k_1\xi_1+k_2(\xi_1-\xi_2)+\dfrac{\eta_1+\eta_2}{2}$

C $k_1\xi_1+k_2(\eta_1+\eta_2)+\dfrac{\eta_1-\eta_2}{2}$　　　　D $k_1\xi_1+k_2(\eta_1+\eta_2)+\dfrac{\eta_1+\eta_2}{2}$

6 已知 $A\backsim B$，则下列说法正确的是（　　　　）

A 存在可逆矩阵 P，使 $P^TAP=B$　　　　B 存在正交阵 T，使 $T^{-1}AT=B$

C 存在对角阵 Λ，使 $A\backsim\Lambda\backsim B$

D 存在若干个初等阵$P_1,P_2,\cdots,P_S$，使$P_1P_2\cdots P_sAP_s^{-1}\cdots P_2^{-1}P_1^{-1}=B$

7 设向量β可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表示，但不能由向量组（Ⅰ）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1}$线性表示，记向量组（Ⅱ）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1},\beta$，则（　　　　）

A α_m不能由（Ⅰ）线性表示，也不能由（Ⅱ）线性表示

B α_m不能由（Ⅰ）线性表示，但可由由（Ⅱ）线性表示

C α_m可由（Ⅰ）线性表示，也可由（Ⅱ）线性表示

D α_m可由（Ⅰ）线性表示，但不可由（Ⅱ）线性表示

8 将一枚硬币独立地掷两次，引进事件A_1={掷第一次出现正面}，A_2={掷第二次出现正面}，A_3={正、反面各出现一次}，A_4={正面出现两次}，则事件(　　　　)

A A_1，A_2，A_3相互独立。　　B A_2，A_3，A_4相互独立。

C A_1，A_2，A_3两两独立。　　D A_2，A_3，A_4两两独立。

9 设随机变量X的概率密度函数为$f(x)=Ae^{-x^2+x}(-\infty<x<+\infty)$，则$A$为(　　　　)

A $\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{1}{4}}$　　B $\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{\frac{1}{4}}$　　C $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{1}{4}}$　　D $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{4}}$

10 设X是一随机变量,$EX=\mu,DX=\delta^2(\mu,\delta>0$常数),则对任意常数$C$,必有(　　　　)

A $E(X-C)^2=EX^2-C^2$　　B $E(X-C)^2=E(X-\mu)^2$

C $E(X-C)^2<E(X-\mu)^2$　　D $E(X-C)^2=E(X-\mu)^2$

二 填空题（每题4分，共20分）

1 设$u=x^x+y^y+x^y$，则$\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}=$__________。

2 微分方程$y''+2y'+y=0$与直线$y=x$在原点相切的特解是____________。

3 设A为三阶方阵，A^*为伴随矩阵，$|A|=-2,|A^2|=$__________，$|2A|=$__________，

$\left|-A\right|=$__________，$\left|\left(\frac{1}{3}A\right)^{-1}-8A^*\right|=$__________。

4 设 $P(A)+P(B)=0.9, P(AB)=0.2,$，则 $P(\overline{A}B)+P(A\overline{B})=$__________。

5 某大学同窗好友 7 人，临毕业前随机地站成一行照像以作毕业留念，事件甲乙丙三人不相邻的概率为__________。

三 解答题（共 90 分）

1 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\int_0^x \sin t dt}}$。(6 分)

2 求广义积分 $\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin e^x}{e^x}-\cos e^x\right)dx$。(6 分)

3 设方程 $F(\frac{y}{x},\frac{z}{x})=0$ 确定了隐函数 $z=z(x,y)$，其中 F 具有连续的一阶偏导数，

求证：$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$。(6 分)

4 设 $f(x)=\cos x$，求二重积分 $\iint\limits_D f\left[yf(x)\right]dxdy$，其中 D 是由直线 $x=\frac{\pi}{4}, x=\frac{\pi}{3}, x$ 轴以及曲线 $y=\frac{\pi}{2}\sec x$ 所围成的平面区。 (8 分)

5 设 $f(x)$ 在[0，1]上可导，且 $\int_0^1 f(x)dx=0$。令 $F(x)=\int_0^x xf(t)dt$，

（1）求 $F'(x)$；

（2）试证：在（0，1）内至少存在一点 ξ，使得 $\int_0^{\xi} f(x)dx+\xi f(\xi)=0$。(8 分)

6 设直线 $y=ax$ 与抛物线 $y=x^2$ 所围成图形的面积为 S_1，它们与直线 $x=1$ 所围成的图形面积为 S_2，并且 $0<a<1$，试确定 a 的值，使 S_1+S_2 达到最小，并求出最小值；求该最小值所对应的平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积。(10 分)

7 设函数 $f(x)$ 可微，且对任何实数 a,b 满足 $f(a+b)=e^a f(b)+e^b f(a)$，且 $f'(0)=e$，求 $f(x)$。(10 分)

8 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T, \beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$ 为非零正交向量，

$$A=\begin{pmatrix} 1+a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & 1+a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & 1+a_nb_n \end{pmatrix}$$，求$|A|, A^n$。(9 分)

9　三阶实对称阵 A 特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1, \lambda_3=-2$，且 $\lambda_3=-2$ 对应特征向量为 $p_3=(1,1,-1)^T$，

求：(1) A；(2) $\beta=(2,3,-1)^T$，计算 $A^{-10}\beta$。(9 分)

10　农耕时节，由甲乙丙三台水泵独立地向农田灌水，三台水泵能够满足灌溉的需要，当一台水泵有故障时，另两台水泵能满足提灌需要的概率为 80%，而当两台水泵有故障时，由剩下的一台水泵保证供水的概率为 30%，已知每台水泵发生故障的概率为 8%。求(1)能保证灌溉的概率；(2)已知水泵有故障时，能保证灌溉的概率。(9 分)

11　设某种商品每周的需求量 X 是服从区间[10，30]上的均匀分布的随机变量，而经销商店进货数量为区间[10，30]中的某一整数，商店每销售一单位商品可获利 500 元；若供大于求则销价处理，每处理一单位商品亏损 100 元；若供不应求，则可从外部调剂供应，此时每 1 单位商品仅获利 300 元。为使商店所获利润期望值最大，试确定应进货数量。(9 分)