试题编号：311　　试题名称：高等数学

注意：答题一律答在答题纸上，答在草稿纸或试卷上一律无效

一．选择题（每小题 4 分，共 40 分）

1．曲线 $y=x^2$ 和 $x=y^2$ 围成的面积为（　　）

（A）$\frac{1}{2}$　（B）$\frac{1}{3}$　（C）$\frac{1}{4}$　（D）$\frac{1}{5}$

2．设 $f(x)=\sqrt[3]{1+x}-e^{-\frac{2}{3}x}$，则当 $x\to 0$ 时，有（　　）

（A）$f(x)$ 是 x 的高阶无穷小；　（B）$f(x)$ 是 x 的较低阶无穷小；

（C）$f(x)$ 是 x 的等价无穷小；　（D）$f(x)$ 是 x 的同阶而非等价无穷小。

3．下列广义积分收敛的是（　　）

（A）$\int_0^1 \frac{1}{x^2}dx$　（B）$\int_e^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx$　（C）$\int_{-\infty}^0 x^3e^xdx$　（D）$\int_0^1\frac{1}{1-x^2}dx$。

4．设可微函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 取得极小值，则下列结论正确的是（　　）

（A）$f(x,y_0)$ 在 $x=x_0$ 处导数等于零；　（B）$f(x,y_0)$ 在 $x=x_0$ 处导数大于零；

（C）$f(x,y_0)$ 在 $x=x_0$ 处导数小于零；　（D）$f(x,y_0)$ 在 $x=x_0$ 处导数不存在。

5．交换积分次序 $\int_0^{\frac{1}{4}}dy\int_y^{\sqrt{y}}f(x,y)dx+\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}dy\int_y^{\frac{1}{2}}f(x,y)dx=$（　　）

（A）$\int_0^{\frac{1}{4}}dx\int_{x^2}^{x}f(x,y)dy$　（B）$\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_x^{x^2}f(x,y)dy$

（C）$\int_0^{\frac{1}{4}}dx\int_x^{x^2}f(x,y)dy$　（D）$\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_{x^2}^{x}f(x,y)dy$

6．设 $A_{m\times s},B_{s\times n}$，要使 $ABX=0$ 与 $BX=0$ 是同解方程组的一个充分条件是（　　）

（A）$R(B)=n$；（B）$R(B)=s$；（C）$R(A)=m$；（D）$R(A)=s$。

7．设 A,B 为同阶正定阵，则下列结论中不正确的是（　　）

（A）$|A+B|>0$；　（B）$\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}$ 可相似于对角阵；

（C） A□B 为正定阵；　　（D） 存在矩阵 G,H 使 $G^2=A,H^{-2}=B$ 。

8．筐中有 5 只黄色的小鸡和 4 只黑色的小鸡，从中任意取出 2 只，则取出的小鸡颜色相同的概率为 （　　　）

(A) $\frac{4}{9}$；　(B) $\frac{5}{8}$；　(C) $\frac{5}{9}$；　(D) $\frac{7}{12}$ 。

9．已知随机变量 X 服从二项分布，且 $EX=2.4,DX=1.44$，则二项分布的参数 n,p 的值为（　　　）

（A）n=4，p=0.6；　（B） n=6，　p=0.4；　（C） n=8，　p=0.3；　（D） n=24，　p=0.1。

10．设随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2x-1}$，则随机变量 X 的数学期望和方差分别为（　　　）

(A)　$EX=1,DX=1$；　(B)　$EX=1$，DX 不存在；

(C)　$EX=\frac{1}{2},DX=1$；　(D)　$EX=1$，$DX=\frac{1}{2}$

二．填空题（每小题 4 分，共 24 分）

11．求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n\sin\frac{1}{n}}{(n-1)^{n-1}}=$______________________________。

12．设方程 $e^z+z+xy=0$，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$______________________________。

13．求微分方程 $y''-8y'+16y=0$ 的通解______________________________。

14．四阶方阵 A,B 按列分块 $A=(\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),B=(\beta,3\alpha_1,4\alpha_2,-\alpha_3)$，若 $|A|=1,|A-B|=2$，则 $|B|=$______________________________。

15．设方阵 A 满足 $A^3-A=0$，则当 C 取__________________值时 $A+CI$ 可逆。

16．设 A,B 为随机事件，$P(A)=0.7,P(\overline{AB})=0.6$，则 $P(A-B)=$____________ 。

三．解答题（本题共 10 小题，满分 86 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

17．（本题满分 6 分）设直线 $y=x$ 与对数曲线 $y=\log_a x$ 相切，求 a

18．（本题满分 8 分）

设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2},x<0\\ 1,x=0\\ \dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x 2\sin t dt,x>0\end{cases}$，试讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性与可导性。

19．（本题满分 7 分）已知连续函数 $f(x)$ 满足条件 $f(x)=\int_0^{2x} f(\frac{t}{2})dt+e^{-3x}$，求 $f(x)$。

20．（本题满分 8 分） 设 a,b 均是大于 1 的常数，且 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$，证明对于任意 $x>0$

有 $\frac{1}{a}x^a+\frac{1}{b}\geq x$。

21．（本题满分 6 分）

计算二重积分 $\iint\limits_D |x-y|dxdy$，D 是由直线 $x=0,x=1,y=0,y=1$ 所围成的平面区域。

22．（本题满分 8 分）

若 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上二阶可导，$f(\frac{1}{3})=0$ 且 $f(1)=3\int_{\frac{1}{3}}^1 xf'(x)dx$，证明：存在 $\xi\in(0,1)$

使 $f'(\xi)=0$。

23．（本题满分 9 分）

构作一个非齐次线性方程组 $AX=b$，使 $\eta=(1,0,-1,2)^T$ 是它的一个特解，$\alpha_1=(1,2,-1,0)^T,\alpha_2=(0,2,1,-1)^T$ 是它的导出组 $AX=0$ 的一基础解系。

24．（本题满分 12 分）

设二次型 $f=x_1^2+ax_2^2+x_3^2+bx_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$ 经正交线性变换 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$ 化成了标准形 $f=y_2^2+4y_3^2$，求 a,b 之值及矩阵 T；并在 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ 条件下，求函数 f 的极值。

25.（本题满分 10 分）

设随机变量 X 的绝对值不大于 1；$P\{X=-1\}=\dfrac{1}{4}, P\{X=1\}=\dfrac{1}{4}$；在事件 $\{-1<X<1\}$ 出现的条件下，X 在(-1,1)内在任一子区间上取值的条件概率与该子区间长度成正比，试求：

（1）X 的分布函数 $F(x)=P\{X\le x\}$

（2）X 取负值的概率 p。

26.（本题满分 12 分）

设连续性随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} A+Be^{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^m}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}(其中\sigma>0, m为正整数)$$

求（1）A 和 B 的值;

（2）X 概率密度函数 $f(x)$;

(3) $Y=\dfrac{1}{\lambda}\left(\dfrac{X}{\sigma}\right)^m$ 的概率密度函数 $f_Y(y)$（其中 λ>0）。