试题编号：328　　试题名称：数学分析

注意：答题一律答在答题纸上，答在草稿纸或试卷上一律无效

一．计算题（每小题 8 分，共 72 分）

1．$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-x^x}{\ln x-x+1}$；

2．$\lim\limits_{n\to\infty}[(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\cdots(1+\frac{n}{n})]^{\frac{1}{n}}$；

3．求和 $\sum\limits_{1}^{\infty}\dfrac{n^2-1}{\sqrt{2^n}}$；

4．$\oint\limits_{\Gamma^+}\dfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$，其中 $\Gamma:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 以逆时针方向为正方向；

5．试以 $\begin{cases}u=xy\\ v=y/x\end{cases}$ 为新自变量，变换方程 $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$；

6．$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\arctan bx-\arctan ax}{x}dx,(b>a>0)$；

7. $\displaystyle\oiint\limits_{\Sigma}|xy|z^2dxdy,$ 其中 Σ 为曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=1$ 所围立体的表面外侧；

8. $\displaystyle\int_1^{+\infty}dx\int_1^{+\infty}\frac{|x^2-y^2|}{(x^2+y^2)^2}dy$；

9. 计算 $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega}xdV$，其中 Ω 为以 $O(0,0,0),A(R,0,0)$ 为球心，R 为半径的球体的公共部分；

二．（10 分）设 $\{a_n\}$ 是严格递降的正数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，证明：级数 $\sum\limits_{1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ 收敛。

三.（12 分）试确定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$ 的收敛域。又问：该级数在收敛域内是否一致收敛？是否连续？是否可微？证明你的结论。

四.（18 分）1. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上有连续的导数，$f(0)=0, f(1)=1$，证明：

$$\int_0^1 |f'(x)-f(x)|dx \geq \frac{1}{e};$$

2. 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = 0$；

3. 证明：$p \geq 1, \sum\limits_1^\infty \frac{1}{(n+1)\cdot\sqrt[p]{n}} < p$；

五.（10 分）举例说明连续函数 $f(x)$ 使 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，但未必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

证明：当 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调且 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛时有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

六.（8 分）设 $x>0$，给出使关系式 $\frac{A}{x^2} \leq \ln x \leq Bx^2$ 成立的最佳的 A 和 B 值.（最佳意指不能再改进）

七.（10 分）设 $p>0$ 为常数，试问 $I=\int_1^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\cos x}{x^p}dx$ 关于参数 α 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛性如何？

八.（10 分）试叙述聚点定理与有限覆盖定理，并用前者证明后者。