

试题编号：422      试题名称：高等代数

**注意：答题（含填空题）一律答在答题纸上，答在草稿纸或试卷上一**

## 律无效

### 一 填充题（4×5分=20分）

1. 多项式  $f(x) = x^3 - 8$  在复数域上的分解为\_\_\_\_\_。
2. 多项式  $x^3 - 6x^2 + 15x - 14$  的有理根是\_\_\_\_\_。
3. 多项式  $f(x)$  除以  $ax - b$  ( $a \neq 0$ ) 所得的余式为\_\_\_\_\_。
4. 设  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ , 则  $A$  的逆矩阵是\_\_\_\_\_。

**二 (15分)** 设  $A$  为  $n \times n$  矩阵,  $n \geq 2$ 。证明:  $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$ , 其中  $A^*$  表示矩阵  $A$  的伴随矩阵。

**三 (15分)** 设  $n$  阶矩阵  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & \cdots & \cdots & 2 \\ 2 & 0 & 2 & \cdots & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ , 求  $|A|$ 。

### 四 (20分) 用配方法化二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 10x_1x_3 + 6x_2x_3$$

为标准形, 并求相应的线性变换, 以及它的正惯性指数和符号差。

**五 (20分)** 设  $\begin{cases} (1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = \lambda^2 + 2\lambda, \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = \lambda^3 + 2\lambda^2, \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = \lambda^4 + 2\lambda^2, \end{cases}$

(1) 求上述方程组的系数行列式; (2) 当  $\lambda$  为何值时方程组有解, 并求解。

**六 (15分)** (1) 什么叫欧氏空间? (2) 证明: 欧氏空间  $V$  的每个子空间  $W$  都有唯一的正交补。

**七 (15分)** 如果  $A$  为  $n \times n$  矩阵,  $A^2 = E$ , 证明:

$$R(A+E) + R(A-E) = n.$$

这里  $R(A)$  表示矩阵  $A$  的秩。

**八 (15分)** 设  $W$  是  $n$  维线性空间  $V$  的子空间,  $T$  是  $V$  上的线性变换, 令  $W_0 = W \cap T^{-1}(0)$  ( $T^{-1}(0)$ )

表示  $T$  的核空间), 证明:

$$\dim W = \dim TW + \dim W_0 .$$

**九 (15 分)** (1) 什么叫正定矩阵和正交矩阵?

(2) 如果  $A$  既是正定矩阵又是正交矩阵, 试讨论矩阵  $A$  是何种类型的矩阵。