南京农业大学

2008 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

试题编号：628　　试题名称：数学分析

注意：答题一律答在答题纸上，答在草稿纸或试卷上一律无效

1. 计算题（每题 6 分，共 60 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\int_0^n \cos x dx}{\int_1^n \ln x dx}$.

（2）$\lim\limits_{x\to 0}(2-\cos x+\sin x)^{1/\ln(1+x)}$.

（3）$\int e^x\left(\dfrac{1-x}{1+x^2}\right)^2 dx.$

（4）$\int_0^{\pi/2}\dfrac{2+\sin^2 x}{\sqrt{\cos x}}dx$.

（5）$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx.$

（6）设函数 $y=x+\ln x(x>0)$，求 $\dfrac{dx}{dy}|_{x=1},\dfrac{d^2x}{dy^2}|_{x=1}$.

（7）求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$ 的和函数 $f(x)$.

（8）计算积分 $\iint\limits_D \dfrac{1}{y^2+x}dxdy$，其中 D 是 x=0,y=1,y=x 围成的区域.

（9）计算 $\int_L x^2 ds$.其中 L 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线。

(10) 计算 $\iint_\Sigma x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$，其中 Σ 为圆锥曲面 $z^2=x^2+y^2$ 被平面 z=0, z=2 所截部分的外侧..

2. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，并且 $f(a)=f(b)$。证明存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使得 $\sin\eta\cdot[\xi f'(\xi)+f(\xi)]=f(b)\cdot\sin\xi$。（10 分）

3. 判断下列说法是否正确，正确的给予证明，不正确的举出反例。（15 分）

南京农业大学
2008年攻读硕士学位研究生入学考试试题

（1）若函数 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续，则 $[f(x)]^2$ 在区间 I 上也一致连续.

（2）若一个二元函数 $f(x,y)$ 在原点（0,0）处的两个二阶混合偏导数存在，它们必定相等.

（3）若广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，则极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在有限.

4. 设二元函数 $f(x,y)$ 在 R^2 上连续，若 $\forall(x_0,y_0),\forall r>0,\iint_{D_r} f(x,y)dxdy=0,$ $D_r(x_0,y_0)=\{(x,y)\,|\,(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\le r^2\}$，则 $f(x,y)=0,(x,y)\in R^2$.（10分）

5. 函数列 $\{f_n(x)\},x\in[0,1]$ 定义为：

$$f_n(x)=nxe^{-nx^2}.$$

（1）求 $\{f_n(x)\}$ 的极限函数。

（2）数列 $\left\{\int_0^1 f_n(x)dx\right\}$ 是否收敛？

（3）$\{f_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上是否一致收敛？（15分）

6. 设函数 $f(x):[a,b]\to[a,b]$ 连续.

（1）证明至少存在一点 $c\in[a,b]$，使得 $f(x)=c$.

（2）若存在正常数 $L<1$，使得 $|f'(x)|<L$，则（1）中的点 c 还是唯一的.

（3）证明对任意 $x_0\in[a,b]$，由下式

$$x_n=f(x_{n-1}),n=1,2,3,\cdots$$

所定义的迭代数列收敛于上述点 c.(15分)

7. 举出同时满足下列条件函数 $f(x)$ 的例子:（1）$f(x)$ 在某点 x_0 的邻域内有任意阶导数，（2）在此邻域内 $f(x)$ 的 Taylor 级数不收敛于 $f(x)$.（15分）

8. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有连续的一阶导数. 证明

$$\int_a^b|f(x)|dx\le\max\left\{\int_a^b|f'(x)|dx,\left|\int_a^b f(x)dx\right|\right\}.\qquad\text{(10分)}$$