# 南京农业大学
# 2009年攻读硕士学位研究生入学考试试题

试题编号：628　　试题名称：数学分析

**注意：答题一律答在答题纸上，答在草稿纸或试卷上一律无效**

1. 计算题（每题6分，共60分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\dots+\dfrac{1}{n+n}\right)$ .

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\sin x+e^{x}\right)^{1/x}$.

（3）$\int \sin(\ln x)dx$.

（4）$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2}\sin^n xdx$.

（5）$\int_0^{+\infty}x^{1003}e^{-x^{2008}}dx$.

（6）设 $\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}, u=\dfrac{1}{\rho}[\varphi(\rho-at)+\psi(\rho+at)]$, 其中 $\varphi,\psi$ 是任意两个二阶可微函数，求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$.

（7）$\iint\limits_D \sin|x-y|dxdy$， 其中 $D=[0,\pi/2]\times[0,\pi/2]$.

（8）计算三重积分

$$I=\iiint\limits_V\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)dxdydz.$$

其中 $V$ 是椭球体 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1$.

（9）计算含参变量积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx\ (b>a>0)$ 的值.

(10) 求无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n$ 的和.

2. 叙述并证明闭区间上函数连续的零点存在定理。（10分）

3. 判断下列说法是否正确，并说明理由。（15 分）

（1）存在定义在闭区间上积分和极限可交换但不一致收敛的函数列.

（2）若函数 $f(x)>0$ 且广义积分 $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛，则存在正数 $X$，使得当 $x>X$ 时，$f(x)<\frac{1}{x}$.

（3）若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$ 收敛.

4. 证明若函数 $f(x), g(x)$ 都在区间 $I$ 上一致连续，则 $f(x)g(x)$ 也在区间 $I$ 上一致连续. (10 分)

5. 将函数 $f(x)=|x|\ \ (-\pi \le x \le \pi)$ 展开成 Fourier 级数；（10 分）

6. 设 $\sum_{+}$ 表示半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}\,(x^2+y^2\le 1)$ 的上侧，求第二类曲面积分 $J=\iint\limits_{\Sigma_+}(x+y)z^2dydz+(x^2y-2z)dzdx+(2x+z)y^2dxdy$. (10 分)

7. （1）级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ 是否收敛？

（2）设 $a_{2n-1}=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right), a_{2n}=\frac{1}{n}, n=1,2,\mathrm{L}$ . 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 条件收敛（10 分）

8. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n(1+x^n)}$ 在区间 $(0,1)$ 上一致收敛，并证明其和函数 $s(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上由连续导数. (15 分)

8. 设 $\varphi(x), f(x), g(x)$ 是定义在区间 $[a,b]$ 的连续函数，$\varphi(x)>0$，$f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 单调递增. 试证明

$$\left\{\int_a^b \varphi(x)f(x)dx\right\}\left\{\int_a^b \varphi(x)g(x)dx\right\} \le \left\{\int_a^b \varphi(x)dx\right\}\left\{\int_a^b \varphi(x)f(x)g(x)dx\right\}.$$（10 分）