2000年南京理工大学离散数学与数理逻辑考研试题

1.（5分）A，B是两个集合，给出 $A\oplus B=B$ 的充分必要条件是什么，并证明你的结论。

2.（5分）R是集合A上的二元关系，s（R）是R的对称闭包，t（R）是R的传递闭包。证明 $t(s(R))\supseteq s(t(R))$，并举例说明有可能 $t(s(R))\neq s((R))$。

3.（6分）R是集合A上等价的二元关系，证明 R^2 也是A上的等价关系。

4.（6分）已知：f是A到B的映射，g是B到C的映射。

（1）若f与g是单射，则 $g\circ f$ 也是单射。

（2）若 $g\circ f$ 是满射，则g是满射，举例说明f不一定是满射。

5.（4分）已知：$A_1=\{x\in R \mid 0\leqslant x\leqslant 1\}$，$A_2=\{x\in R \mid 0<x<1\}$

证明 $|A_1|=|A_2|$。

6.（4分）一个无向简单图如果同构于它的补图，则称这个图为自互补图。

（1）画一个5个顶点的自互补图。

（2）证明：一自互补图一定只有4k或4k+1个顶点（k为正整数）。

7.（5分）画出 $K_{4,3}$，$K_{4,3}$ 是否为平面图？为什么？

8.（9分）设T=（V，E）是一个图。证明以下三条等价：

（1） T是一棵树

（2） T连通，$|V|=|E|+1$

（3） T中无圈，$|V|=|E|+1$

9.（4分）有16人，围坐在一个园桌四周开会。已知这16个人中任意二人能认识其余14人。证明这16个人能坐在这个园桌四周使每个人都认识各自左右的邻人。

10.（5分）判断“在带权连通图中任何一个圈中权最小的边一定是

最小生成树的枝”这句话对吗？证明或举反例说明你的结论。

11.（6 分）已知：$(G_1, *_1)$，$(G_2, *_2)$ 是二个群，令 $G=G_1\times G_2$，$\forall (g_1, g_2)$，$(g_1', g_2')\in G$，定义：$(g_1, g_2) * (g_1', g_2') = (g_1 *_1 g_1', g_2 *_2 g_2')$。

（1）证明 $(G, *)$ 是群。

（2）$\overline{G_1}=\{(g_1, e_2) \mid g_1\in G_1, e_2\in G_2$ 是 G_2 中么元$\}$

证明 $\overline{G_1}$ 是 G 的正规子群。

12.（4 分）H_1，H_2 是 G 的子群，且 $H_1\nsubseteq H_2$，$H_2\nsubseteq H_1$。

证明：$H_1\cup H_2\neq G$

13.（6 分）$(G, \cdot)$ 是一个群。令 $G\xrightarrow{f}G$，$f(g)=g^{-1}$。

（1） 证明 f 是双射。

（2） f 是同构当且仅当 $(G, \cdot)$ 是交换群。

14.（6 分）A 是一个非空集。R 是 A 上的一个二元关系，若 R 满足反自反，反对称和传递性称 R 为 A 上的严格序关系。证明：若 S 是 A 上的偏序关系，则 $S-\triangle_A$ 为 A 上的严格序关系。

15.（10 分）把下列语句翻译为谓词演算公式

（1）若要人不知，除非己莫为。

（2）每一个数均有唯一的一个数是它的后继。

（3）If a program cannot be told a fact，then it cannot learn that fact。

（4）某些人对某些食物过敏。

（5）尽管有人能干，但未必一切人能干。

16.（5 分）试证明联结词集合$\{\neg, \rightarrow\}$是完备的；联结词集合$\{\wedge\}$不是完备的。

17.（5 分）已知公理

A: $\vdash\Delta(\forall xP(x)\rightarrow P(x))$

B: $\vdash\Delta((P\rightarrow(Q\rightarrow R))\rightarrow(Q\rightarrow(P\rightarrow R)))$

C: $\vdash\Delta((P\rightarrow Q)\rightarrow((Q\rightarrow R)\rightarrow(P\rightarrow R)))$

D: $\vdash\Delta((P\rightarrow Q)\rightarrow((Q\rightarrow P)\rightarrow(P\leftrightarrow Q)))$

以及分离规则和全$_n$规则：

$$\Delta(\gamma_1\rightarrow(\gamma_2\rightarrow(\ldots(\gamma_n\rightarrow \alpha(x))))) \vdash\Delta(\gamma_1\rightarrow(\gamma_2\rightarrow(\ldots(\gamma_n\rightarrow\forall x\,\alpha(x)))))$$

试证明：$\Delta(\forall x(\gamma\rightarrow P(x))\rightarrow(\gamma\rightarrow\forall xP(x)))$

18.（5 分）已知前提：

（1） Tom 在何处，Mary 在何处；

（2） Mary 在何处，John 在何处；

（3） John 在何处，它的 Computer 在何处；

（4） Tom 在 Library；

询问“John 的 Computer 是否在 Library？”

试用逆向演绎系统给出它的证明程序。