南京理工大学

2004年硕士学位研究生入学考试试题

试题编号：200411036

考试科目：高等代数（满分： 150分）

考生注意：所有答案（包括填空题）按试题序号写在答题纸上，写在试卷上不给分

一．选择题（5分×6=30分,每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求）

1. 设$m\times n$阶矩阵A的列向量组线性无关，B为$n\times n$阶矩阵且满足$AB=A$，则B的秩---------------.

(A) 大于n ；

(B) 小于n ；

(C) 等于n ；

(D) 不能确定.

2. 设P是3阶非零矩阵，P的每一行都是线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=0 \\ 2x_1-x_2+ax_3=0 \\ 3x_1+x_2-x_3=0 \end{cases}$$

的解，则---------------（$|P|$表示P的行列式）.

(A) $a=1$且$|P|\neq 0$；

(B) $a=1$且$|P|=0$；

(C) $a=-1$且$|P|\neq 0$；

(D) $a=-1$且$|P|=0$.

3. 设矩阵$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$，则下列矩阵中与$P$合同的是---------------.

(A) $\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$；

(B) $\begin{pmatrix} -3 & & \\ & -4 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$；

(C) $\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 2 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$;

(D) $\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$.

4. 设 $P=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$，则 P 的最小多项式为---------------.

(A) $(\lambda-2)(\lambda-3)$;

(B) $(\lambda-2)(\lambda-3)^2$

(C) $(\lambda-3)^2$

(D) $(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-1)$.

5.设 P 为三阶实对称矩阵，且 $P^2-2P=0$，秩 $P=2$，则 P 的全部特征值为---------------.

(A) 0,2,2 ;

(B) 0,0,2 ;

(C) 2,2,2 ;

(D) 0,0,0 .

6. 设 A 是线性空间 V 中的线性变换，$\alpha,\beta\in V$，则下列命题中正确的是---------------.

(A) 若 α,β 线性无关，则 $A\alpha,A\beta$ 也线性无关;

(B) 若 $k_1A\alpha+k_2A\beta=0$；则 $k_1\alpha+k_2\beta=0$ （k_1,k_2 为常数）;

(C) $A\alpha=A\beta$，则 $\alpha=\beta$;

(D) $A\alpha\neq A\beta$，则 $\alpha\neq\beta$.

二. 填空题（6 分×6=36 分）

1. 设 $f(x)=x^3-7x^2+7x+15$，$g(x)=x^2-x-20$，则

$(f(x),g(x))=$---------------.

2. 当实数$k=$---------------时，$f(x)=x^3-3x+k$ 有重根。

3. 设A，B均为n阶可逆矩阵，则$H=\begin{pmatrix}0 & A\\ B & 0\end{pmatrix}$的逆矩阵是---------------。

4. 设三阶矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 1 & 2\\ 3 & 0 & 4\end{pmatrix}$，三维列向量$\alpha=\begin{pmatrix}x\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$. 已知列向量$A\alpha$与$\alpha$

线性相关，则$x=$---------------.

5. 设三阶矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ x & 4 & y\\ -3 & -3 & 5\end{pmatrix}$且$A$有三个线性无关的特征向量，$\lambda=2$，

是A的二重特征值，则$x=$---------------；$y=$---------------.

6. 三阶矩阵$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}$的若当（Jordan）标准形为---------------.

三.（12分）

λ,μ 为何值时，线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0\\ x_1+3x_2+5x_3+5x_4=2\\ -x_2+(\lambda-3)x_3-2x_4=\mu\\ 3x_1+2x_2+x_3+\lambda x_4=-1\end{cases}$$

分别有唯一解？无解？有无穷多解？并在有无穷多解时求出其通解.

四.（12分）

设欧氏空间V中线性变换$\mathcal{A}$在一组标准正交基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}0 & -2 & -2\\ -2 & 3 & -1\\ -2 & -1 & 3\end{pmatrix}.$$

1) 求$\mathcal{A}$的所有特征值；
2) 求V的一组标准正交基，使$\mathcal{A}$在这组基下的矩阵为对角阵.

五.（12 分）

设 R 为实数集合.

1) 证明 $W=\left\{\begin{pmatrix}0 & a\\ a & b\end{pmatrix} \mid a,b\in R\right\}$ 是 $R^{2\times 2}$ 的子空间，并求 W 的维数和一组基；

2) 设 $R^{2\times 2}$ 中的内积定义为 $\left(\begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ a_3 & a_4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b_1 & b_2\\ b_3 & b_4\end{pmatrix}\right)=\sum_{i=1}^{4}a_ib_i$，求 1)中所求出基的度量矩阵.

六.（10 分）

设线性空间 V 中的线性变换 $\boldsymbol{A}$ 在一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵是

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

线性变换 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB=A-2B}$，求 $\boldsymbol{B}$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵.

七.（12 分）

设线性空间 V 的线性变换 $\boldsymbol{A}$ 以 V 中每个非零向量为特征向量，λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

证明：1) λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的唯一特征值；

3) $\boldsymbol{A}$ 是数乘变换.

八.（10 分）

设 V_1,V_2 是欧氏空间 V 的子空间且 $V_1\perp V_2$，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots\cdots,\beta_t$ 分别是 V_1 与 V_2 中的线性无关的向量.

证明：向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots\cdots\beta_t$ 是线性无关的.

九.（8 分）

设 V 是复数域上的 n 维线性空间，$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 是 V 中线性变换，$\boldsymbol{A}(V)$，$\boldsymbol{B}(V)$ 分别表示它们的值域，dim 表示维数. 若

$$\dim \boldsymbol{A}(V)+\dim \boldsymbol{B}(V)<n$$

证明：$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 有一公共的特征向量.

十.（8 分）

设 m 阶矩阵 A 的不变因子为 $1,\cdots\cdots,1,\varphi(\lambda)$，

这里，$\varphi(\lambda)=\lambda^m+a_1\lambda^{m-1}+\cdots\cdots+a_{m-1}\lambda+a_m$.

证明：A 相似于 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_m \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_{m-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & -a_{m-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_1 \end{pmatrix}$.