南京理工大学

2004年硕士学位研究生入学考试试题

试题编号：200411034

考试科目：高等数学（满分150分）

考生注意：所有答案（包括填空题）按试题序号写在答题纸上，写在试卷上不给分

一、填空题（每题5分，共25分）

1、 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}=$______；

2、设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 连续，若 $\lim\limits_{x\to 0}(1+\dfrac{f(x)}{x})^{\frac{1}{\sin x}}=e^2$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=$______；

3、设 $x\in[a,\ b]$，则方程 $\int_a^x e^t dt+\int_b^x e^{-t^2}dt=0$ 在 $(a,\ b)$ 内根的个数是______；

4、已知平行四边形对角线向量为 $\vec{c}=\vec{a}+2\vec{b}$ 及 $\vec{d}=3\vec{a}-4\vec{b}$，其中 $|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，$(\widehat{\vec{a},\ \vec{b}})=\dfrac{\pi}{6}$，则平行四边形的面积为______；

5、设 S 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$（$0\le z\le H$）的下侧，则 $\iint\limits_S dzdx+2dydz+3dxdy=$______。

二、选择题（每题5分，共25分）

1、设 $f(x)=\cos|x|+x^2|x|$，则使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数 $n=$（ ）

(A) 0；　(B) 1；　(C) 2；　(D) 3.

2、 设 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^3}=-1$，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处（ ）

(A) 不可导；　(B) 可导且 $f'(a)=0$；　(C) 有极大值；　(D) 无极值.

3、设$I=\frac{1}{s}\int_0^{st} f(t+\frac{x}{s})dx$，其中$s>0,t>0$，则下列结论正确的是（ ）

(A) I 依赖于 s、t、x；　(B) I 只依赖于 s、t；

(C) I 只依赖于 t；　(D) I 只依赖于 s.

4、二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点$(0,0)$处

(A) 连续，偏导数存在；　(B) 连续，偏导数不存在；

(C) 不连续，偏导数存在；　(D) 不连续，偏导数不存在.

5、设S为球面$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=1$，则$\oiint\limits_S (x+y+z)dS=$（ ）

(A) $4\pi(a+b+c)$；　(B) $\frac{4}{3}\pi(a+b+c)$；　(C) 4π；　(D) 0.

三、（每题 8 分，共 40 分）

1、从一切过直线L：$\begin{cases}x+y+z+1=0\\ 2x+y+z=0\end{cases}$的平面中找出平面$\pi$，使原点到$\pi$的距离为最长.

2、设方程组

$$\begin{cases}F(y-x,y-z)=0\\ G(xy,\frac{z}{y})=0\end{cases}$$

可以确定隐函数$x=x(y)$，$z=z(y)$，求$\frac{dx}{dy}$，$\frac{dz}{dy}$.

3、设平面区域D由直线$x=-1,y=1$和曲线$y=x^3$围成，计算二重积分

$\iint\limits_D x[1+yf(x^2+y^2)]dxdy$，其中$f$为连续函数.

4、设L是平面$x+y+z=0$与球面$x^2+y^2+z^2=1$的交线，从oz正向往下看为逆时针方向，计算曲线积分

$$I=\oint_L \frac{(x+1)dx+(y+1)dy+zdz}{x^2+y^2+z^2}.$$

5、判别级数$\sum_{n=2}^{\infty}\sin(n\pi+\frac{1}{\ln n})$是绝对收敛还是条件收敛.

四、设$k>0$，试讨论k为何值时，方程$\arctan x-kx=0$存在正根.（10 分）

五、古埃及大金字塔为一正四棱锥，高 125m，塔基为 230m×230m 的正方形。传说历时 20 年建成。若建造金字塔所用石块的密度为 $3210\mathrm{kg}/\mathrm{m}^3$，试求建成这座金字塔所作的总功.（10 分）

六、设 $F(t)=\iiint\limits_{\Omega}[z^2+f(x^2+y^2)]dxdydz$，其中 $f(u)$ 连续，Ω 为 $0\le z\le h$，$x^2+y^2\le t^2$，试求 $\frac{dF}{dt}$ 和 $\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t^2}F(t)$.（16 分）

七、（每题 6 分，共 12 分）

1、设 $a(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 连续非负，求证当且仅当无穷积分 $\int_0^{\infty}a(t)dt$ 发散时，微分方程 $\frac{dx}{dt}+a(t)x=0$ 的每一个解 $x(t)$ 满足 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=0$；

2、设 $a>0$，$f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 连续有界，试证明方程

$$\frac{dx}{dt}+ax=f(t)\quad(t\ge 0)$$ 的所有解在 $[0,+\infty)$ 有界.

八、设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $f'(x)>0$, $f(a)>0$，$A(\xi)$ 及 $B(\xi)$ 为如图所示的面积。证明存在唯一的 ξ，使 $\frac{A(\xi)}{B(\xi)}=k$（k 为正常数）.（12 分）