

南京理工大学

2004 年硕士研究生入学考试试题

试题编号: 200411038

考试科目: 量子力学 (满分 150 分)

考生注意: 所有答案按试题序号写在答题纸上, 写在试卷上不给分。请在以下 11 题中选做 10 题。

- 一. 质量为 m 的粒子处于定态波函数 $\Psi = \frac{1}{r} e^{ikr}$, 计算其几率密度和几率流密度。(15 分)
- 二. 粒子在一维势场 $V(x)$ 中运动, 证明属于不同能级的束缚态波函数彼此正交。(15 分)
- 三. 设 $[q, p] = i\hbar$, $f(q)$ 是 q 的可微函数, 试证明: $[q, p^2 f(q)] = 2i\hbar p f(q)$ 。(15 分)
- 四. 求角动量的 z 分量 $\hat{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$ 的本征值和本征函数。(15 分)
- 五. 试证明在动量表象中算符的表示为 $\hat{x} = i\hbar \frac{\partial}{\partial p}$ 。(15 分)
- 六. 设 $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。证明 $\hat{S}_x \alpha = \frac{\hbar}{2} \beta$, $\hat{S}_y \beta = -i \frac{\hbar}{2} \alpha$ 。(15 分)
- 七. 在能量表象中 $\hat{H} = \begin{pmatrix} E_1^0 + a & b \\ b & E_2^0 + a \end{pmatrix}$, 且 $E_1^0 \neq E_2^0$, a, b 为实数。用微扰公式求能量至二级修正值。(15 分)
- 八. 体系哈密顿算符的矩阵表示为 $\hat{H} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \alpha \\ 0 & 2 & 0 \\ \alpha & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 其中 $\alpha \ll 1$ 。写出 (1) 微扰哈密顿的矩阵表示; (2) 能量至一级修正。(15 分)
- 九. 在 \hat{S}_z 表象中, 求 (1) \hat{S}_x, \hat{S}_y 的本征值和本征态; (2) 如果粒子处于 $S_x = \frac{\hbar}{2}$ 的本征态, 求在此态中 S_y 的值为 $\frac{\hbar}{2}$ 的几率为多少?(15 分)

十. 求在状态 $\psi = \frac{1}{\sqrt{3}}[\sqrt{2}\chi_{1/2}(S_z)Y_{10}(\theta, \varphi) + \chi_{-1/2}(S_z)Y_{11}(\theta, \varphi)]$ 下, 力学量

$\hat{J}_z = \hat{L}_z + \hat{S}_z$ 的可能值是多少? (15分)

十一. 已知体系处于状态 $\psi = -\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_1 + \frac{1}{2}\varphi_2 + \frac{1}{2}\varphi_3$ 中, φ_1 、 φ_2 和 φ_3 为态空间中的基矢, 体系哈密顿算符 \hat{H} 及力学量 \hat{A} 的矩阵表示分别为:

$$\hat{H} = \hbar\omega_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \hat{A} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad \text{其中 } \omega_0, a \text{ 是正的实数。求 (1)}$$

对处于 Ψ 态的体系进行能量测量可测得哪些值? 各个值出现的概率是多少? (2) 体系能量的平均值为多少? (3) 在 Ψ 态上力学量 A 的平均值为多少? (15分)