南京理工大学

2005年硕士学位研究生入学考试试题

试题编号：200511034

考试科目：高等数学（满分150分）

<u>考生注意：所有答案（包括填空题）按试题序号写在答题纸上，写在试卷上不给分</u>

一、填空题（每题5分，共25分）

1、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\ln(1+x)+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\sin x}=$ ________；

2、设$f(x)$连续，且$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$，则$\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+2}t\sin\frac{3}{t}f(t)dt=$ ________；

3、设$F(x)=\int_1^x\sqrt{|t|}\ln|t|dt$，则$F'(0)=$ ________；

4、已知$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=\sqrt{2}$，且$\vec{a}\cdot\vec{b}=2$，则$|\vec{a}\times\vec{b}|=$ ________；

5、设L为半圆$0\le y\le\sqrt{1-x^2}$的边界，则$\oint_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds=$ ________。

二、选择题（每题5分，共25分）

1、函数$f(x)=(x^2-x-2)|x^3-x|$不可导点的个数是（ ）

(A) 0；　(B) 1；　(C) 2；　(D) 3.

2、已知$f(x)$在$x=0$的某个邻域内连续，且$f(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$则在点$x=0$处$f(x)$（ ）

(A)不可导；　(B) 可导且$f'(0)\neq 0$；　(C)取极大值；　(D)取极小值.

3、设a为常数，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}[\dfrac{\sin(na)}{n^2}-\dfrac{1}{\sqrt{n}}]$（ ）

(A)绝对收敛；　(B)条件收敛；　(C) 发散；　(D) 收敛性与a有关；

4、设$f'_x(0,0)=1$，$f'_y(0,0)=2$，则（ ）

(A) $f(x,y)$ 在（0，0）连续；　(B) $df(x,y)\big|_{(0,0)} = dx + 2dy$；

(C) $\frac{\partial f}{\partial l}\big|_{(0,0)} = \cos\alpha + 2\cos\beta$ ，其中 $\cos\alpha$，$\cos\beta$ 为 $\vec{l}$ 的方向余弦；

(D) $f(x,y)$ 在（0，0）点沿 x 轴负方向的方向导数为－1.

5、设 S 是平面 $x+y+z=4$ 被圆柱面 $x^2+y^2=1$ 截出的有限部分，则曲面积分 $\iint_S ydS$ 的值是（ ）

(A) 0；　(B) $\frac{4}{3}\sqrt{3}$；　(C) $4\sqrt{3}$；　(D) π.

三、（每题 8 分，共 40 分）

1、求过点 $M(-1,0,4)$，且与直线 L：$x+1=y-3=\frac{z}{2}$ 垂直相交的直线方程。

2、设方程 $F(x+y,y+z)=1$ 确定了隐函数 $z=z(x,y)$，其中 F 具有连续的二阶偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

3、将对极坐标的二次积分 $I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$，交换积分顺序，再把它化为直角坐标系，写出先对 x 后对 y 的累次积分.

4、设 $f(u)$ 具有连续导函数，计算积分

$\oiint_S x^3 dydz + [\frac{1}{z} f(\frac{y}{z}) + y^3] dzdx + [\frac{1}{y} f(\frac{y}{z}) + z^3] dxdy$，其中 S 为 $x>0$ 的锥面 $y^2+z^2-x^2=0$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=1$，$x^2+y^2+z^2=4$ 所围立体表面的外侧.

5、设 $a_n = \int_0^{n\pi} x|\sin x| dx$　(n=1, 2, 3…)，求 $\lim_{n\to\infty}(\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_n}{2^n})$.

四、讨论函数 $f(x)=\ln x-\frac{x}{e}+k$，（$k>0$）在 $(0,\infty)$ 内零点的个数.（10 分）

五、令 $a_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2k} e^{-kx^2} dx$（$k=1,2,\cdots$），讨论 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 的收敛性.（10 分）

六、设曲线 $y=\sin x$（$0 \le x \le \frac{\pi}{2}$），直线 $y=a$ $(0 \le a \le 1)$ 与 $x=0$ 所围成的面积为 A_1，$y=\sin x$（$0 \le x \le \frac{\pi}{2}$），直线 $y=a$ 与 $x=\frac{\pi}{2}$ 所围成的面积为 A_2，求

$A = A_1 + A_2$ 的最小值.（10 分）

七、设环境保持恒定温度 20^0C， 有一个热物体在 10 秒从温度为 100^0C 降到 60^0C， 问此物体从 100^0C 降到 25^0C 需要多少时间？（物体冷却速度与该物体和环境温度之差成正比）（10 分）

八、设函数 $f(x)$ 在 $|x|\le 1$ 上有定义， 在 $x=0$ 的某个邻域内具有二阶连续导数， 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$， 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(\dfrac{1}{n})$ 绝对收敛.（10 分）

九、设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续， 在 (a,b) 内有二阶导数， 试证：存在 $c\in(a,b)$，使 $f(b)-2f(\dfrac{a+b}{2})+f(a)=\dfrac{(b-a)^2}{4}f''(c)$.（10 分）