南 京 理 工 大 学

2007 年硕士学位研究生入学考试试题

试题编号: 200711031

考试科目: 数学 (　　满分 150 分)

考生注意:所有答案(包括填空题) 按试题序号写在答题纸上,写在试卷上不给分.

一. 填空题: (本题共 12 小题,每小题 5 分, 满分 60 分).

1. 设 A 为三阶矩阵, 且 $|A|=2$, 则 $|2A^{-1}-3A^{*}|=$______.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{\int_0^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}dt}=$________.

3. $u=xy+yz+zx$ 在点 $M(1,2,3)$ 处沿梯度方向的方向导数为_________.

4. 曲线 $\begin{cases} y^2+3z^2-y=1 \\ x=0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周的旋转曲面方程为_________.

5.已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=8$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=5$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=$______________.

6. 曲面 $x^2+2y^2+3z^2=12$ 在点 $(1,2,1)$ 处的切平面方程为_____________.

7. 已知 $z=\arctan\dfrac{y}{x}$, 则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$_______.

8. 设平面曲线 L 是单位圆周在第一象限部分, 则曲线积分 $\int_L xyds=$______.

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}=$_______.

10. 微分方程 $y''-y'-6y=e^{3x}$ 的通解为____________.

11. $\int_{-1}^{1}(x^5+\sin^2 x)\cos x\,dx=$ ________.

12. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$，多项式 $f(x)=x^2+x+3$，则 $f(A)=$ ________.

二. （本题共 6 小题,每小题 5 分，满分 30 分）.

1. 两直线 $L_1:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z}{4}$ 与 $L_2:\begin{cases}x=1+t\\ y=-2+t\\ z=2+2t\end{cases}$ 的关系是 ________.

(A) 互相垂直; (B) 斜交;

(C) 互相平行 ; (D) 异面直线.

2. 设 A，B 均为正定矩阵，则________

(A) AB 是正定矩阵. (B) $A+B$ 是正定矩阵.

(C) $A-B$ 是正定矩阵. (D) $|A|=|B|$.

3. 正项级数(1)：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与(2)：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^3$，则下列说法中正确的是________.

(A)若（1）发散则（2）也发散; (B) 若（1）收敛则（2）也收敛;

(C)若（1）发散则（2）可能发散也可能收敛; (D)（1)，(2）敛散性一致

4. 当 $x\to a$ 时，$f(x)$ 是_____时，必有 $\lim\limits_{x\to a}(x-a)f(x)=0$.

(A) 任意函数; (B) 有极限的函数;

(C) 无界变量; (D) 无穷大量;.

5. 下列各式中,正确的是________.

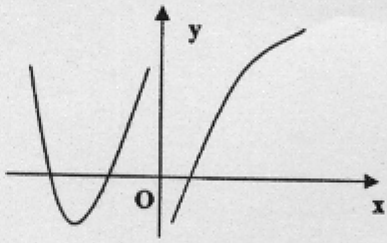
(A) $\int f'(2x)dx=\dfrac{1}{2}f(2x)$ (B) $\int f'(2x)dx=f(2x)+c$

(C) $\left(\int f(2x)dx\right)'=f(2x)$ (D) $\left(\int f(2x)dx\right)'=\dfrac{1}{2}f(2x)$

6. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其导函数的图形如图所示，则 $f(x)$ 有________.

(A)一个极小值点和两个极大值点. (B)两个极小值点和一个极大值点.

(C) 两个极小值点和两个极大值点. (D)三个极小值点和一个极大值点.



三.(满分 10 分) 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+x-6}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数，并求收敛区间。

四.(满分 10 分) 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x}, & x<0,\\ 6, & x=0,\\ \dfrac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\dfrac{x}{4}}, & x>0,\end{cases}$

问 a 为何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续；a 为何值时，$x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点？

五.(满分 10 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $4\int_{\frac{3}{4}}^{1} f(x)dx=f(0)$，

证明：在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使 $f'(\xi)=0$。

六. (满分 10 分) 计算积分 $\oiint\limits_{\Sigma} x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$，

其中 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=R^2$ 的外侧。

七. (满分 10 分) 常数 λ 取何值时，线性方程组

$$\begin{cases}2x_1-4x_2+5x_3+3x_4=1\\ 3x_1-6x_2+4x_3+2x_4=2\\ 4x_1-8x_2+3x_3+x_4=\lambda\end{cases}$$ 有解？并在有解时求其通解。

八（满分 10 分）设函数 $f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且满足方程：

$$f(t)=e^{9\pi t^2}+\iint\limits_{x^2+y^2\le 9t^2} f\left(\frac{1}{3}\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy$$ ，求 $f(t)$。