南京理工大学

2007 年硕士学位研究生入学考试试题

试题编号：2007011038

考试科目：高等代数（满分： 150 分）

考生注意：所有答案（包括填空题）按试题序号写在答题纸上，写在试卷上不给分

一. 填空题 (每小题 4 分，共 20 分)

1. 设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 5 \\ -1 & 2 & \lambda & 1 \\ 1 & -1 & -1 & \lambda+1 \end{bmatrix}$，如果存在 4 阶非零方阵 B，使得 $AB=0$，则 $\lambda=$______ .

2. 若向量 $\overrightarrow{\beta}=\{0,k,k^2\}$ 能由向量组 $\overrightarrow{\alpha_1}=\{1+k,1,1\},\overrightarrow{\alpha_2}=\{1,1+k,1\},\overrightarrow{\alpha_3}=\{1,1,1+k\}$ 唯一线性表示，则 k 取值范围是 ______ .

3. 已知二次曲面 $x^2+y^2+z^2+2ax+2xz+2byz=1$ 经过正交变换 $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=Q\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$ 化成椭圆柱面 $(y')^2+2(z')^2=1$，则常数 a 与 b 应满足的条件是 ______ .

4. 设 n 阶方阵 A 满足条件 $A^3=A$，则 A 的特征值只能是 ______ .

5. 已知 $f=5x_1^2+5x_2^2+cx_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$ 的秩为 2，则参数 $c=$______.

二. 按要求解答下列问题

1. (5 分) 证明：如果 $(f(x),g(x)=1$，则 $(f(x)g(x),f(x)+g(x))=1$.

2. (10 分) 设 A,B,C,D 都是 n 阶方阵，A 是非奇异的，E 是 n 阶单位方阵，且

$$X=\begin{pmatrix} E & 0 \\ -CA^{-1} & E \end{pmatrix}, Y=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, Z=\begin{pmatrix} E & -A^{-1}B \\ 0 & E \end{pmatrix}.$$

(1) 求乘积 $XYZ=$?;

(2) 证明：$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=|A||D-CA^{-1}B|$.

3. (5 分) 设 σ 和 τ 是线性空间 $P[x]$ 中依据如下方式定义的两个线性变换：

$$\sigma(f(x)=f'(x), \tau(f(x)=xf(x),$$

其中 $f'(x)$ 表示多项式 $f(x)$ 的导数. 求 $\sigma\tau-\tau\sigma$.

三.(10 分) 试找出全体实 2 级矩阵 $M_2(R)$ 所构成的线性空间到 R^4 的一个线性同构.

四.(10 分) 设 A 为正定矩阵. 证明: 存在可逆实矩阵 B 使得 $A=B^2$.

五.(10 分) 已知线性方程组

$$\begin{cases} (\lambda+3)x_1+x_2+2x_3=\lambda \\ \lambda x_1+(\lambda-1)x_2+x_3=2\lambda \\ 3(\lambda+1)x_1+\lambda x_2+(\lambda+3)x_3=3 \end{cases}$$

讨论 λ 为何值时, 方程组有解. 在有解的情况下, 求其通解.

六.(10 分) 求由向量 $\overrightarrow{\alpha_1}=(1,2,1,0)$, $\overrightarrow{\alpha_2}=(-1,1,1,1)$ 生成的子空间 V_1 与由向量 $\overrightarrow{\beta_1}=(2,-1,0,1)$, $\overrightarrow{\beta_2}=(1,-1,3,7)$ 生成的子空间 V_2 的交的基和维数.

七.(10 分) 设 A 是 $n\times m$ 矩阵, B 是 $m\times n$ 矩阵, $n<m$, 而 E 是 n 阶单位矩阵. 如果 $AB=E$, 则 B 的列向量组必线性无关.

八.(15 分) 用非退化线性变换化下列二次型为规范形, 并写出所作的线性变换:

$$f(x_1,x_2,x_3)=-4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3.$$

九.(15 分) 设 $\overrightarrow{\beta}=\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{bmatrix}$, 如果方程组 $AX=\overrightarrow{\beta}$ 有解但不唯一, 求

(1) 参数 a 的值;

(2) 正交矩阵 P 与对角阵 D , 使得 $P^{-1}AP=D$.

十.(15 分) 在三维空间 P^3 中, 已知线性变换 T 在基

$$\overrightarrow{\eta_1}=(-1,1,1),\overrightarrow{\eta_2}=(1,0,-1),\overrightarrow{\eta_3}=(0,1,1)$$

下的矩阵是 $\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\-1&2&1\end{bmatrix}$, 求 T 在基 $\overrightarrow{\epsilon_1}=(1,0,0),\overrightarrow{\epsilon_2}=(0,1,0),\overrightarrow{\epsilon_3}=(0,0,1)$ 下的矩阵.

十一.(15 分) 设 V 是复数域上线性空间, 其维数 $n\geq 2$, $f(\alpha,\beta)$ 是 V 上一个对称双线性函数.

1) 证明: V 中有非零向量 ξ 使 $f(\xi,\xi)=0$;

2) 如果 $f(\alpha,\beta)$ 是非退化的, 则必有线性无关的向量 ξ,η 满足

$$f(\xi,\eta)=1,\quad f(\xi,\xi)=f(\eta,\eta)=0.$$