南京理工大学

2009年硕士学位研究生入学考试试题

试题编号：2009011037

考试科目：高等代数（满分： 150分）

考生注意：所有答案（包括填空题）按试题序号写在答题纸上，写在试卷上不给分

一. 填空（5分×12=60分）

1. 设 $f(x)=\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$，则 x^4 的系数为__________.

2.设 A,B 分别为 r,t 阶的可逆矩阵，$Q=\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}$，则 $Q^{-1}=$______.

3.设3维线性空间 V 上的线性变换 A 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵是 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$，则 A 在基 $\varepsilon_3,\varepsilon_2,\varepsilon_1$ 下的矩阵是__________.

4.与齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1-x_2+x_4=0 \\ x_2-x_4=0 \end{cases}$ 解空间中向量都正交的所有向量可以表示为____________________.

5. 已知 n 阶矩阵 A 有一个特征值为 -1，则 A^2+A-2E 必有一个特征值为__________.

6. 已知 A,B 都是三阶方阵，秩$(A)=2$，$B=\begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$，则秩$(BA^*)=$______.

7. 如果把实 n 阶对称矩阵按合同分类，即两个实 n 阶对称矩阵属于同一类当且仅当它们合同，则实 n 阶对称矩阵可分为__________类.

8. 若 $AB=BC, B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，则 $A^{10}-4A^8=$__________.

11. 每个 n 阶复矩阵都与一个 ____________________ 相似。

12. 设 $\xi=(1,-2,3)'$ 是矩阵 $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ a & -2 & 2\\ 3 & b & -1\end{pmatrix}$ 的属于 λ 的一个特征向量，则 $\lambda=$__________ 。

二. (本题满分 10 分) 问多项式 $1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$ 是否有重根？请证明你的结论。

三. (本题满分 10 分) a,b 取什么值时，线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1\\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=a\\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3\\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=b \end{cases}$$

有解？在有解的情形，求一般的解。

四. (本题满分 10 分) 设 B 是一 $r\times r$ 矩阵，C 是一 $r\times n$ 矩阵，且秩 $(C)=r$ 。证明：如果 $BC=0$ ，则 $B=0$ 。

五. (本题满分 10 分) 设 A 是实对称矩阵，证明：当实数 t 充分大之后，$tE+A$ 是正定矩阵。

六. (本题满分 10 分) 设 V_1 是由 $\alpha_1=\{1,2,1,0\}$ 与 $\alpha_2=\{-1,1,1,1\}$ 生成的子空间， V_2 是由 $\beta_1=\{2,-1,0,1\}$ 与 $\beta_2=\{1,-1,3,7\}$ 生成的子空间，求 $V_1\cap V_2$ 的一组基和维数。

七. (本题满分 10 分) 设 n 维线性空间 V 中的线性变换 $\mathcal{A}$ 在两组基

$$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n \text{ ，与 } \eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$$

下的矩阵分别为 A 和 B ，从基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 到基 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 的过渡矩阵为 X ，证明： A 与 B 是相似的。

八. (本题满分 15 分) 求齐次线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+x_4-3x_5=0\\ x_1+x_2-x_3+x_5=0 \end{cases}$$

的解空间 (作为 R^5 的子空间) 的一组标准正交基。

九. (本题满分 15 分) 设线性空间 $V=\mathbb{R}[x]_4$ ，这里 $\mathbb{R}[x]_4=\{a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3 \mid a_0,a_1,a_2,a_3\in\mathbb{R}\}$ 。对于任意取定的 4 个不同的实数 b_1,b_2,b_3,b_4 ，令

$$p_i(x)=\frac{(x-b_1)\cdots(x-b_{i-1})(x-b_{i+1})\cdots(x-b_4)}{(b_i-b_1)\cdots(b_i-b_{i-1})(b_i-b_{i+1})\cdots(b_i-b_4)}, \quad i=1,2,3,4$$

证明： $p_1(x),p_2(x),p_3(x),p_4(x)$ 构成 V 的一组基，并求 $p_1(x),p_2(x),p_3(x),p_4(x)$ 的对偶基。