南京理工大学

2009年硕士学位研究生入学考试试题

试题编号：2009011035

考试科目：高等数学（满分150分）

考生注意：所有答案（包括填空题）按试题序号写在答题纸上，写在试卷上不给分

一、　填空题（本题共5小题，每小题5分，满分25分）。

(1) 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\tan x}+e^{x\ln(1+x)}-2}{1-\cos x}=$ ______________.

(2) 求不定积分 $\int\dfrac{\arctan e^x}{e^x}dx=$ ______________.

(3) 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的函数，且 $f(x)=2|x|,x\in[-\pi,\pi)$，其 Fourier 级数为 $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，则 $a_3=$ ______________（要计算出结果）。

(4) L 为从（0，0）到（2，0）的顺时针方向的上半圆弧：$x^2+y^2=2x(y\geq 0)$，则 $\int\limits_L 3x^2ydx-x^3dy=$ ______________.

(5) 已知函数 $f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}t(\dfrac{x+t}{x-t})^x$，则 $f'(t)=$ ______________.

二、选择题（本题共5小题，每小题5分，满分25分．每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求）

(1) 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则下列命题错误的是__________

(A) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在,则 $f(0)=0$;　(B) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在,则 $f(0)=0$;

(C) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在,则 $f'(0)=0$;　(D) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在,则 $f'(0)$ 存在。

(2) $x=1$ 是函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{x-1}}}$ 的________

（A）连续点；（B）跳跃间断点；（C） 可去间断点；（D） 第二类间断点.

（3）设函数$f(x)$有二阶连续导数，$f'(0)=0,\lim\limits_{x\to 0}\frac{f''(x)}{|x|}=1$，则_____

（A） $f(0)$是$f(x)$的极大值； （B） $f(0)$是$f(x)$的极小值；

（C) $(0,f(0))$是曲线$y=f(x)$的拐点；（D） $f(0)$不是$f(x)$的极值，$(0,f(0))$也不是曲线$y=f(x)$的拐点。

（4）若 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$且$\vec{a}\neq\vec{0}$，则必有__________

（A） $\vec{b}=\vec{c}$ ； （B） $|\vec{b}|=|\vec{c}|$；

（C） $prj_{\vec{c}}\vec{a}=prj_{\vec{c}}\vec{b}$； （D） $prj_{\vec{a}}\vec{c}=prj_{\vec{a}}\vec{b}$。

（5）设Ω是由球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 和 $z=0$ 所围的空间区域，则 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dv=$__________

（A） $\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^a r^2dr$ ； （B ） $\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^a r^4\sin\theta dr$；

（C ） $\iiint\limits_{\Omega}a^2dv$； （D ） $\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^a r^4\sin\theta dr$。

三、解答题(本题共 5 小题，每小题 8 分，共 40 分)

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x(1+t^2)e^{t^2-x^2}dt$

2. 设二元函数$z=f(xy,y^2)+xg(\frac{x}{y})$，其中$f$，$g$有二阶连续偏导数或导数，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

3. 求积分$I=\iint\limits_{D}|x-y^2|dxdy$，其中积分区域$D=\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$。

4. 求不定积分$\int x^2\cdot\sin(2x)dx$。

5. 求 曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}xdydz+(z^2-y)dzdx+(x^2-z)dxdy$，其中$\Sigma$为曲面

$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的上侧。

四、（本题满分 10 分）求函数 $I(x)=\int_e^x \frac{\ln t}{t^2-2t+1}dt$ 在区间 $[e,e^2]$ 上的最大值。

五、（本题满分 10 分）求曲面 $x=\frac{y^2}{2}+2z^2$ 上平行于平面 $2x+2y-4z+1=0$ 的切平面方程，并求切点处的法线方程。

六、（本题满分 10 分）将函数 $f(x)=\frac{1}{2x^2-x-10}$ 展开成麦克劳林公式，并求 $f^{(50)}(0)$。

七、（本题满分 10 分）求微分方程 $y''+y=x+e^x$ 的通解。

八、（本题满分 10 分）设 $f(x),g(x)$ 可导，且 $g'(x)\neq 0$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\frac{f(a)-f(\xi)}{g(\xi)-g(b)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$。

九、（本题满分 10 分）在某一人群中推广新技术是通过其中已掌握新技术的人进行的，设该人群的总人数为 N，在 $t=0$ 时刻已掌握新技术的人数为 x_0，在任意时刻 t 已掌握新技术的人数为 $x(t)$（将 $x(t)$ 视为连续可微函数），其变化率与已掌握新技术人数和未掌握新技术人数之积成正比，比例系数 $k>0$，求 $x(t)$。