南京理工大学

2009年硕士学位研究生入学考试试题

试题编号 2009011036

考试科目 数学分析 （满分150分）

考生注意： 所有答案（包括填空题）按试题序号写在答题纸上，写在试卷上不给分。

数学分析试题 ______

一（10分）求下列极限：

（1） $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\left[\ln\left(x^2+x\right)-2\ln(x+1)\right]$ （2） $\lim\limits_{n\to+\infty}n^2\left(3^{\frac{1}{n}}+3^{-\frac{1}{n}}-2\right)$

二（14分）判断题：（若正确，给出论证；若不正确，举一个反例）

（1）设$\{a_n\}$是一数列，对任意n，$0<a_n<1$，则$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n^n=0$;

（2）设$f'(x_0)>0$，则存在$\delta>0$，使得$f(x)$在$(x_0-\delta,x_0+\delta)$内严格单调增。

三(15分)设$a_1=3, a_{n+1}=\dfrac{1}{1+a_n}$, n = 1, 2⋯

(1)证明：$\{a_{2n-1}\}$单调减，$\{a_{2n}\}$单调增；

(2)证明：数列$\{a_n\}$收敛， 并求$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$。

四(15分)（1）将$f(x)=e^{ax}$ ，$x\in(0,2\pi)$展开为*Fourier*级数；

（2）求级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2+1}$的和。

五（10分）证明：当$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$时，$\tan x+\sin x>2x$。

六（15分）设$a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,dx$，n为自然数。求证：

（1） $a_n=\dfrac{n-1}{n+2}a_{n-2}$，n = 3, 4 ⋯

(2) $a_n\le a_{n-1}\le a_{n-2}$ ；

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=1$。

七（15 分）（1）证明：函数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot\frac{x^n}{1+x^n}$ 在开区间（0，1）上一致收敛；

（2）记上述级数的和函数为 $s(x)$，则 $s(x)$ 在 $(0,\ 1)$ 上有连续导数。

八（10 分）计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} x^2\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$，其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与

$z=x^2+y^2$ 围成的有界区域。

九（10 分）设 $u=f(x-y,y-z,z-x)$，假设 f 对其中变量有二阶连续偏导数，计算

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 和 $\frac{\partial u^2}{\partial y\partial z}$。

十（15 分）（1）设 $f(\alpha)=\int_0^1\frac{\ln(1+\alpha x)}{1+x^2}dx$，对任意 $\alpha\in(0,1)$，求 $f'(\alpha)$；

（2）计算 $\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$。

十一（12 分）设 D 是平面上的有界闭区域，函数 $u(x,y)$ 在 D 上有二阶连续偏导数，在 D 的

内部成立 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+cu(x,y)=0$。其中 c ＜ 0 为常数。证明：

（1）若 u 在 D 上有正的最大值，则它的最大值不能在 D 的内部取得；

（2）若在 D 的边界上 u ＝ 0，则在 D 上 u(x，y)恒等于零。

十二（9 分）设 f 是实轴上的二阶可导的函数，$|f(x)|\le 1$，且 $[f(0)]^2+[f'(0)]^2=4$。

证明：存在 $\xi\in(-2,2)$，使得 $f(\xi)+f''(\xi)=0$。