南京理工大学

2010年硕士学位研究生入学考试试题

试题编号：2010011034
考试科目：数 学（满分 150 分）

考生注意：所有答案（包括填空题）按试题序号写在答题纸上，写在试卷上不给分

一、填空题（每题5分，共40分）

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x^2+\sin\frac{1}{x}}{x^2}=$ ________________。

2. $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{1+2n}+\dfrac{1}{2+2n}+\cdots+\dfrac{1}{n+2n})=$ __________。

3. 求极限 $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\cot\dfrac{\pi}{2}x=$ ________。

4. $d\int_a^x e^t\sin t dt=$ _______。

5. 设 $L:x^2+y^2=1$，则 $\oint_L y^2ds=$ ________。

6. 方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{2x-y}$ 的通解为 ______________。

7. 已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi}{6}$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n^2}$ 的和等于 ____________。

8. A,B 均为 n 阶矩阵，$A\sim B$，B 为正交矩阵，则 $|A^2|=$ ________。

二、计算下列各题（每题8分，40分）

1. 设 $f(x)$ 满足条件 $f(0)=0,f'(0)=1$，试求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\cos x)}{\tan x^2}$。其中 $f(x)$ 具有一阶连续的导数。

2. 求 $I(x)=\int_{-2}^{2}|t-x|e^t dt$ 在区间 $[-2,2]$ 上的最大值。

3. 已知偶函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续且满足方程

$$f(x)=3x-\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}\int_{-1}^{1}f^2(x)dx。$$

求 $f(x)$。

4．求方程 $xdy+2y(\ln y-\ln x)dx=0$ 的通解。

5．求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{3^n(2n+1)}$ 的收敛区间。

三、计算下列各题（每题 8 分，共 24 分）

1．试问 a，b 取何值时，线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=1\\x_1+2x_2-2x_3+x_4=a\\2x_1+3x_2-x_3+2x_4=2\\x_1+3x_2-5x_3+x_4=b\end{cases}$ 有解？并在有解时求其通解。

2．设 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&2&-1\\1&0&1\end{pmatrix}$，求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$ 为对角阵。

3．用正交变换 $X=PY$ 化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_1x_2-2x_2x_3+x_3^2$ 为标准形，并指出 f 的正,负惯性指数.这里，$X=(x_1,x_2,x_3)^T,Y=(y_1,y_2,y_3)^T$。

四、（满分 10 分）求 $\lim\limits_{x\to\infty,y\to2+}(1+\frac{1}{xy})^x$。

五、（满分 10 分）设 $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上是周期函数,且 $f(x)\to0\ (x\to\infty或x\to-\infty)$，

证明 $f(x)\equiv0$，$x\in(-\infty,\infty)$。

六、（满分 6 分）求 $\int\frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{1-2\mathrm{x}}}$。

七、（满分 10 分）证明下列命题。

（1）$\frac{x^{10}+y^{10}}{2}\geq(\frac{x+y}{2})^{10}$，$-\infty<x,y<\infty$；

（2）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)\geq0$，若 $\int_a^b f(x)dx=0$，则 $f(x)\equiv0$。

八、（满分 10 分）证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{nx}{1+n^2x}dx=\frac{\pi}{4}$。