南京理工大学

2011年硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：840　　科目名称：高等代数　　满分：150分

注意：① 认真阅读答题纸上的注意事项；②所有答案必须写在答题纸上，写在本试题纸或草稿纸上均无效；③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回！

一.（25分）填空题：

（1）设 $f(x)=x^4+x^3-3x^2-4x-1, g(x)=x^3+x^2-x-1$，则它们的最大公因式是____________，最小公倍式是____________。

（2）设 α,β 是 n 维非零列向量，矩阵 $A=\alpha\beta^T$，则 $r(A)=$____________。

（3）设 A 是 n 阶方阵，x 是 n 维非零列向量，$A^TAx=0$，则 $Ax=$____________。

（4）设 A 是 3×4 矩阵，$r(A)=3$，线性方程组 $Ax=B$ 的三个解是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，若已知 $\alpha_1=(1,-1,2,0)^T$，$2\alpha_2+3\alpha_3=(6,-4,8,1)$，则 $Ax=B$ 的通解是____________。

（5）设 $V=\{A|\quad A\in R^{2\times2}, trA=0\}$，则 V 的一组基是____________。

二.（10分）设 $f(x)$ 是 n 次多项式且 $f'(x)|f(x)$，证明：$f(x)=0$ 有 n 重根。

三.（15分）若 A 为 r 阶方阵，B 为 $r\times n$ 矩阵，且秩 $B=r$，试证：

（1）若 $AB=0$，则 $A=0$；

（2）若 $AB=B$，则 $A=I$。

四.（10分）设 A 为 n 阶方阵，$A^n\neq0$，证明：对任意正整数 $k, A^k\neq0$。

五.（10分）设

$$A=\begin{pmatrix}3&4&0&0\\4&-3&0&0\\0&0&2&4\\0&0&0&2\end{pmatrix}$$

求 $|A|^{2k}$ 和 A^{2k}（其中 k 为正整数）。

六.（15分）求正交变换 T，使得

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2-4x_1x_2-4x_2x_3$ 为标准型。

七.（20 分）设V表示实数域上的全体 2 阶方阵构成的线性空间，定义V上的变换A如下：

$$A(x)=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}x,\quad x\in V$$

（1）证明：A是线性变换；

（2）求A在基$E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$下的矩阵；

（3）求A的值域AV，给出它的维数和一组基；

（4）求A的核N，给出N的维数和一组基。

八.（15 分）在欧氏空间V中

（1）若向量α,β等长，证明：$\alpha+\beta$与$\alpha-\beta$正交，并作出几何解释；

（2）设$\dim V=n$，S是V的子空间，证明：$S^{\perp}$是V的子空间，且

$$\dim S+\dim S^{\perp}=n$$

$$\left(S^{\perp}\right)^{\perp}=S$$

九.（10 分）设 T 是欧氏空间V上的变换，满足对任意的$x,y\in V,(Tx,Ty)=(x,y)$，证明：T 是正交变换。

十.（10 分）证明：线性空间V上的双线性函数$f(\alpha,\beta)$为反对称的充要条件是：对任意$\alpha\in V$，都有$f(\alpha,\alpha)=0$。

十一.（10 分）设$A=(a_{ij})$和$B=(b_{ij})$是n阶正定矩阵，证明：$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}b_{ij}>0$。