苏 州 大 学

2002 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目：高等代数

1．（15 分）设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 都是 $n\times n$ 矩阵。解矩阵方程 $AX=B$。

2．（20 分）设 $A=\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 4 & -4 & -2 \end{pmatrix}$，$A$ 是否相似于对角矩阵？如果相似于对角矩阵，求可逆矩阵 C，使得 $C^{-1}AC$ 是一个对角矩阵。

3．（10 分）设 k,m,r,s 都是非负整数。设 $f(x)=1+x+x^2+x^3$，$g(x)=x^{4k}+x^{4m+1}+x^{4r+2}+x^{4s+3}$。证明：$f(x)$ 整除 $g(x)$。

4．（10 分）设 A，B 都是 $n\times n$ 矩阵，G 是 $n\times m$ 矩阵，并且 G 的秩是 n。证明：如果 $AG=BG$，则 $A=B$。

5．（10 分）设 A 是 $n\times n$ 矩阵，并且 A 是可逆的。证明：如果 A 与 A^{-1} 的所有的元素都是整数，则 A 的行列式是 -1 或 1。

6．（10 分）设 A 是 $n\times n$ 反对称矩阵，证明：$-A^2$ 是半正定的。

7．（15 分）设 A 是 $n\times n$ 矩阵。如果 $A^2=E_n$，并且 $(A-E_n)$ 的秩是 r，A 是否相似于一个对角矩阵？如果是，求这个对角矩阵。

8．（10 分）设 V 是有理数域 上的线性空间，V 的维数是 n，A 与 B 是 V 的线性变换。其中 B 可对角化，并且 $AB-BA=A$。证明：存在正整数 m，使得 A^m 是零变换。