苏 州 大 学

2010 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

专业名称：基础数学、计算数学、概率论与数理统计、应用数学、运筹学与控制论、金融数学　　考试科目：数学分析（B）卷

(共四大题，总分 150 分；答案写在答卷纸上，并请写明相应题号)

一、下列命题中正确的给予证明，错误的举反例或说明理由．共 6 题，计 30 分．

1. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 一定收敛.

2. 设 f 在 $[a,+\infty)$ 上连续且无界，则一定有 x_n, $n=1,\cdots$, 使 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} |f(x_n)| = +\infty$.

3. 设 $a_n \geq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 收敛.

4. 存在一个处处连续且在 $x=1$ 和 $x=2$ 处不可导，其余处可导的函数 $f(x)$.

5. 设 f 连续，非负，且 $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

6. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上无穷次可微并且满足 $f^{(k)}(0)=0$, $k=0,1,2,\cdots$, 则 $f(x)\equiv 0$.

二、下列 4 题每题 15 分，计 60 分．

1. 确定实数 a 使得函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{(1+x)^a-1}{x}, & x>0, \\ 1, & x\leq 0 \end{cases}$ 连续.

2. 计算积分 $\int_C \dfrac{x-y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x + \dfrac{x+y}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$, 其中 C 是上半椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$, 从点 $A(-3,0)$ 到 $B(3,0)$.

3. 计算曲面积分 $I = \iint\limits_{\Sigma} \dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, 其中 Σ 是曲面 $2x^2+2y^2+z^2=4$ 的外侧.

4. 求 $f(x)=x^3$ 在区间 $(0,2\pi]$ 上的傅立叶 (Fourier) 级数展开式，并证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$.

还有1页试题

注意：答案请不要做在试题纸上。

试卷编号：618

苏 州 大 学

2010 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

专业名称：基础数学、计算数学、概率论与数理统计、应用数学、运筹学与控制论、金融数学　　考试科目：数学分析（B）卷

三、下列 2 题每题 15 分，计 30 分．

1. 设 f 在 $[a,b]$ 上连续，$\int_a^b f(x)dx = 0$. 证明存在 $\xi\in(a,b)$, 使 $\int_a^{\xi} f(x)dx = f(\xi)$.

2. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正项发散级数，试判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{1+a_n}$ 的敛散性.

四、下列 3 题选做 2 题，计 30 分．

1. (1) 设 $\{f_n(x)\}$ 和 $\{g_n(x)\}$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的有界连续函数列，$\{f_n(x)\}$ 和 $\{g_n(x)\}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上分别一致收敛到 $f(x)$ 和 $g(x)$. 证明：$\{f_n(x)g_n(x)\}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛到 $f(x)g(x)$;
   (2) 如果 $\{f_n(x)\}$ 和 $\{g_n(x)\}$ 不是有界函数列，举例说明上述结论不一定成立.

2. 设函数 $f(x,y)$ 在非空有界闭区域 D 上连续. 证明 D 中存在无限多点 (ξ,η), 满足
$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = f(\xi,\eta)\cdot \mathrm{mes}(D),$$
其中 $\mathrm{mes}(D)$ 表示 D 的面积.

3. 设 $f(x)$ 在 $[0,T]$ 上二次连续可导，$M=\{\max f(x):\ x\in[0,T]\}$, $m=\{\min f(x):\ x\in[0,T]\}$. 证明不等式：$M-m\leq T\int_0^T |f''(x)|\mathrm{d}x$.

注意：答案请不要做在试题纸上。

试卷编号：618