南京大学1997年攻读硕士学位研究生入学考试试题（三小时）

考试科目 数学分析　　　得分

专　　业：数学系各专业

一．（8分）$u_1=\sqrt{6}$，$u_n=\sqrt{6+u_{n-1}}$，证明$\{u_n\}$有极限，并求出极限.

二．（6分）函数$f(x,y)=x^2-xy+y^2$在$M(1,1)$点处沿什么方向的方向导数值为最大.

三．（6分）由$F(x+\frac{z}{y}+y+\frac{z}{x})=0$确定了隐函数$z=z(x,y)$，其中$F(x)\in C^1$，求证 $xz_x+yz_y=z-xy$.

四．（8分）求$I=\int\frac{d\varphi}{\cos\varphi}$.

五．（10分）设$f(x)\in C^{(\infty)}(\mathbb{R})$（即无穷次连续可微），证明

$$\frac{1}{x^{n+1}}f^{(n)}(\frac{1}{x})=(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}[x^{n-1}f(\frac{1}{x})].$$

六．（9分）在数列$\{x_n\}$中的任一子数列中必能选出收敛于a的子列，则$\{x_n\}$收敛于a.

七．（9分）讨论$f(x,y)=xy$在$\mathbb{R}^2$上的一致连续性

八．（10分）求$\iint\limits_{(S)}x^3dydz+y^3dxdz+z^3dxdy$，

其中(S)是$x^2+y^2+z^2=1$的上半球面的下侧.

九．（10分）求由锥面$4y^2=x(2-z)$与平面$z=0$及$x+z=2$所围立体之体积.

十（12分）$x_n=\ln^p(\sec\frac{\pi}{n})$，

（1）估计x_n关于$\frac{1}{n}$的阶.

(2) 讨论 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 的敛散性

(十一). (12分) 反常积分 $I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\, dx$，证明

(1). I 为收敛的反常积分.

(2). $I<0$.