

南京大学 1999 年攻读硕士学位研究生入学考试试题 (三小时)

考试科目 高等代数

得分

专业: 基础数学, 应用数学, 运筹学与控制论

一. 判断题 (本题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分)

判断下列陈述是否正确. 若正确, 请给出证明; 若错误, 请举出反例.

1. 如果有理数域上多项式 $f(x)$ 在有理数域上没有根, 则 $f(x)$ 在有理数域上不可约.
2. 设 A 为数域 P 上 n 级方阵, $k \in P$, 则 $|kA| = k|A|$.
3. 设 n 级方阵 A 与 B 有完全相同的特征值, 则 A 与 B 相似.
4. 设 A, B 是两个同级方阵, 则 $(AB)^2 = A^2B^2$.
5. 设 A 为实对称矩阵, 若 A 的主对角线上元素全大于 0, 则 A 为正定矩阵.
6. 任一正交矩阵的行列式等于 1.

二. 计算题 (30分).

设 A 是数域 P 上四维线性空间 V 的线性变换 (或自同态), $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 是 V 的一组基, 并且

$$A(\varepsilon_1) = -\varepsilon_1 - 3\varepsilon_2 + 3\varepsilon_3 - 3\varepsilon_4$$

$$A(\varepsilon_2) = -3\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - 3\varepsilon_3 + 3\varepsilon_4$$

$$A(\varepsilon_3) = 3\varepsilon_1 - 3\varepsilon_2 - \varepsilon_3 - 3\varepsilon_4$$

$$A(\varepsilon_4) = -3\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2 - 3\varepsilon_3 - \varepsilon_4$$

1. 写出 A 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 下的矩阵 A .
2. 求出 A 的全部特征值和特征向量.
3. 求一正交矩阵 T 使 $T^{-1}AT$ 成对角形矩阵 (写出此对角形矩阵).

考试科目 高等代数 得分

专业: 基础数学. 应用数学 运筹学 & 控制论

三. 证明题 (40分).

1. (20分). 设 A, B 是两个同级方阵.

(1) 证明 AB 与 BA 有相同的特征多项式.

(2) 试问 AB 与 BA 是否有相同的最小多项式?

请说明理由.

2. (20分). 设 A 为数域 P 上 n 级方阵, E 为 n 级单位矩阵. 证明:

$$A^2 = E \iff \text{秩}(A+E) + \text{秩}(A-E) = n.$$