

南京大学1997 年攻读硕士学位研究生入学考试试题 (三小时)

考试科目 离散数学

得分 _____

专 业: 计算机软件, 计算机应用, 计算机系统结构

一. (10分) R_1, R_2 分别是集合 S, T 上的关系, 定义 $S \times T$ 上的关系 R_3 : $\langle s_1, t_1 \rangle R_3 \langle s_2, t_2 \rangle$ 当且仅当 $s_1 R_1 s_2, t_1 R_2 t_2$

证明: (1) 若 R_1, R_2 为等价关系, 则 R_3 也是等价关系.

(2) 若 R_1, R_2 为偏序, 则 R_3 也是偏序.

二. (10分) 证明: S 是无限集当且仅当存在 S 的真子集 S' 满足 $S \sim S'$ 等势.

三. (10分) 图 $G = (V_G, E_G)$, R_1 是顶点集 V_G 上的“相邻”关系:

即对任意 $u, v \in V_G$, $u R_1 v$ 当且仅当 $uv \in E_G$. R_2 是 V_G 上的“可达”关系, 即 $u R_2 v$ 当且仅当在 G 中存在 uv -通路.

证明: R_2 是 R_1 的传递闭包.

四. (20分) (1) T 是树, e 是 T 中任意一条边, 证明 $T' = T - \{e\}$ 是连通分支数为 2 的森林.

(2) 图 $G = (V_G, E_G)$, $|V_G| = n$, $|E_G| = m$, G 连通且恰好含一个回路的充分必要条件是下列三项中的任意两项成立:

(i) G 连通, (ii) G 恰含一个回路, (iii) $m = n$.

五. (20分): (1) 若 G 是奇数阶有限群, 证明对任意 $a \in G$ 方程 $x^2 = a$ 有解.

(2) 若在有限群 G 中, 对任意 a , $x^2 = a$ 有唯一解.

则 $|G|$ 必为奇数.

六. (10分) Z_m, Z_n 分别是 m, n 阶剩余加群. 定义代数系统

$(Z_m \times Z_n, *)$: 对任意 $x_1, x_2 \in Z_m, y_1, y_2 \in Z_n$,

$$(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1 +_m x_2, y_1 +_n y_2).$$

证明: 若 m, n 互质, $Z_m \times Z_n$ 是循环群. 生成元为 $(1, 1)$

七. (10) 试讨论在一给定公理系统的公理集中增加或删除元素, 对系统性质可能产生什么影响. (提示: 在增加元素的情况下, 要考虑所加公式在原系统中是否可证.)

八. (10) 给下列命题:

(1) 参观展览的人中, 每个 N 大学的男生都背 K 牌书包.

(2) 参观展览的人中, 每个背 K 牌书包的都是来自 N 大学的男生.

(3) 每个背 K 牌书包的 N 大学男生都参观了该展览.

写出相应的谓词逻辑公式, 证明 (1), (2) 不能推出 (3).