南京大学 2000 年攻读硕士学位研究生入学考试试题（三小时）

考试科目 实变函数　　得分

专　　业：基础数学

一.(10分) 试作闭区间 $[0,1]$ 与 $(-\infty,+\infty)$ 之间的一一对应.

二.(10分). 设 $f(x)$ 是定义在 $E=[0,1]$ 上的非负有限可测函数, 证明 $f(x)$ 勒贝格可积的充要条件是: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\cdot mE(n\le f<n+1)$ 收敛.

三.(10分) 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是有限个互不相交的 $\mathbb{R}^1$ 中的勒贝格可测集, 且 $E_k\subset A_k$, $k=1,2,\cdots,n$. 试证 $m^*\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k\right)=\sum\limits_{k=1}^{n} m^* E_k$

四.(10分). 设 $\{E_k\}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的勒贝格可测集列, 且 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} mE_k$ 收敛, 证明 $m\left(\overline{\lim\limits_{k}}\, E_k\right)=0$

五.(10分) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nx^{\frac{1}{2}}}{1+n^2x^2}\sin^5 nx\,dx$

六.(10分) 设 E 为一维勒贝格可测集, $\{f_n\}$ 是定义在 E 上的可测函数列, 试证它的发散点集是勒贝格可测的.

七.(10分) 若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上的导数 $f'(x)$ 存在，证明 $f'(x)$ 为 $(0,1)$ 上的可测函数.

八.(15分) 若 E 为一维勒贝格可测集，$f(x)$ 为 E 上的非负可积函数，又 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f(x)|\sin nx|\,dm=0$，试证明或者 $mE=0$ 或者 $f(x)$ 几乎处处为零.

九.(15分) 设 E 为一维勒贝格可测集，$f(x)$，$f_n(x)$ $(n\in\mathbb{N})$ 均是 E 上的可积函数，$f_n(x)$ 几乎处处收敛于 $f(x)$ 且

$$\lim_{n\to\infty}\int_E |f_n(x)|\,dm=\int_E |f(x)|\,dm$$

试证，在任何可测子集 $e\subset E$ 上，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_e |f_n(x)|\,dm=\int_e |f(x)|\,dm$$