

考试科目 高等数学 得分

专 业: 气象学专业, 大气物理专业

一. 计算 (每小题 5 分, 计 30 分)

1. 设 $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$ 且 $g(x) = x^2 - x + 1$, 求 $f[g(x)]$

2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$

3. 设 $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \\ 1, & 1 < x < 2 \end{cases}$

问 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续吗? 为什么?

4. 已知 $y = \sqrt[3]{\frac{1}{1+x^2}}$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

5. 设 $x = \ln(1+t^2)$, $y = t - \arctg t$, 求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

6. $\lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\tg x}$

二. 试证方程 $\sin x = x$ 只有一个实根 (10分).

三. 不定积分和定积分 (每小题 5 分, 计 15 分)

1. $\int x g^4 x \, dx$

2. $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} \, dx$

3. 计算 $\iint_D (x+y)^2 \, dx \, dy$, 其中 D 为区域

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 2ay \\ x^2 + y^2 \geq ay \end{cases} \quad (a > 0).$$

四. 求初值微分方程 (每小题 5 分, 计 10 分)

1. $y' \sin x = y \ln y$, $y|_{x=\frac{\pi}{2}} = e$

2. $y'' + y = e^x + \cos x$