

南京大学 2002 年攻读硕士学位研究生入学考试试题 (三小时)

考试科目名称及代码 近世代数 5-902

适用专业: 基础数学

注意:

1. 所有答案必须写在“南京大学研究生入学考试答题纸”上, 写在试卷和其他纸上无效;

2. 本科目允许 ~~不允许~~ 使用无字典存储和编程功能的计算器。

一. 填空 (5小题, 每题4分, 共20分)

1. 设 σ 是群 G 到群 \tilde{G} 的同态, 则同态核 $\ker \sigma = \{a \in G: \sigma(a) \text{ 为 } \tilde{G} \text{ 的单位元}\}$ 必是 G 的 _____ 子群。

2. 设群 G 作用在非空集 X 上, 则 $x \in X$ 所在轨道 O_x 的基数是 _____ 在群 G 中的指标 (也叫指数)。

3. 设有限群 G 有合成群列 $\{e\} = H_0 \triangleleft H_1 \triangleleft \dots \triangleleft H_n = G$ (H_i 是 H_{i+1} 的极大正规子群), 则 G 是可解群 \iff 诸商群 H_{i+1}/H_i ($0 \leq i < n$) 是 _____ 阶的。

4. 设 $\sigma = (1234)(567)$, $\tau = (257)(1346)$, $n \in \{1, \dots, 7\}$ 时 $\sigma\tau(n) = \sigma(\tau(n))$. 则 $\tau\sigma\tau^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$ (要求写成不相交轮换 (即循环置换) 的乘积)。

5. 设交换环 R 有乘法单位元, $I \neq R$ 为 R 的理想. 则

R/I 为整环 $\iff I$ 是 R 的 _____ 理想,

R/I 为域 $\iff I$ 是 R 的 _____ 理想。

二. (1,2小题各6分, 第3小题8分, 共计20分).

1. 设 H 与 K 为群 G 的子群, $H \not\subseteq K$ 且 $K \not\subseteq H$. 试证 HUK 不是 G 的子群.

2. 设环 R 有乘法单位元 1 , $a, b \in R$ 且 $1-ab$ 有乘法逆元 c . 试证 $1-ba$ 有逆元 $1+bca$.

3. 设交换环 R 有乘法单位元 1 , $a \in R$ 且对任何 $x \in R$ 都有 $1-ax$ 可逆. 试证 R 的所有极大理想的交集 $J(R)$ 包含元素 a .

三. (10分). 设 G 为有限群, 试证 G 含2阶元 $\iff |G|$ 为偶数.

四. (10分) 设 G 为有限(乘法)群, A, B 为其非空子集且 $|A|+|B| > |G|$. 试证 $AB = G$. (AB 指 $\{ab: a \in A \text{ 且 } b \in B\}$.)

五. (10分) 设 H, K 都是群 G 的有限正规子群, 且 $|H|$ 与 $|K|$ 互素 (又称互质), 试证 $h \in H$ 且 $k \in K$ 时 $hk = kh$.

六. (10分) 设 G 为有限群, H 为 G 的子群, P 是 G 的一个 Sylow p -子群. 试证 (1) (5分) 有 $a \in G$ 使得 $aPa^{-1} \cap H$ 是 H 的 Sylow p -子群, (2) (5分) H 在 G 中正规时 $P \cap H$ 是 H 的 Sylow p -子群.

七. (10分) 设交换环 R 有乘法单位元, 而且 R 的每个理想都是有限生成的. 假设 $I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \dots$ 是 R 的理想升链, 试证有正整数 N 使得 $I_N = I_{N+1} = \dots$.

八. (10分) 设 F 为域, α 是 F 上多项式环 $F[x]$ 中某非零多项式的零点. 试证 $\left\{ \frac{g(\alpha)}{h(\alpha)} : g(\alpha), h(\alpha) \in F[x] \text{ 且 } h(\alpha) \neq 0 \right\} = \{p(\alpha) : p(x) \in F[x]\}$.