南京大学 2002 年攻读硕士学位研究生入学考试试题(三小时)

考试科目名称及代码 高等代数 2-801

适 用 专 业：基础.应用.概率.运筹

注意：

1. 所有答案必须写在"南京大学研究生入学考试答题纸"上，写在试卷和其他纸上无效；

2. 本科目允许/不允许使用无字典存储和编程功能的计算器。

一. 判断下列陈述是否正确，若正确，予以证明；若错误，请举出反例.（每小题5分，共20分）

1. 若 A, B 都是 n 阶非零方阵，且 $AB=0$，则 A 的秩必小于 n.

2. 若有理数域上多项式 $f(x)$ 在有理数域上没有根，则 $f(x)$ 在有理数域上不可约。

3. 若 n 阶方阵 A 和 B 有相同的特征多项式及最小多项式，则 A 与 B 相似。

4. 设 A 为正交矩阵，且 A 的行列式 $|A|=-1$，则 A 必定有一个特征值等于 -1.

二.（ 8分 ）证明多项式 $f(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^p}{p!}$，在有理数域上不可约，其中 p 为一素数。

三.（ 12分 ）设三阶方阵 A 的特征值为 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=3$，对应的特征向量依次为 $\xi_1=(1,1,1)^T$, $\xi_2=(1,2,4)^T$, $\xi_3=(1,3,9)^T$；又设向量 $\beta=(1,1,3)^T$.

1. 将 β 用 ξ_1, ξ_2, ξ_3 线性表示；

2. 求 $A^n\beta$（n 为自然数）。

四.（ 12分 ）设 $A=ee^T$，其中 e 是每个分量都为1的 n 维列向量。试求：

1. A 的特征多项式及最小多项式；

2. A 的全部特征值及与之对应的特征向量。

五.（ 12分 ）设 V 是 n 维欧氏空间，γ 是 V 中一个单位向量。定义 V 上变换 σ：$\forall \alpha \in V$，$\sigma(\alpha)=\alpha-2(\alpha,\gamma)\gamma$。证明：

1. σ 是正交变换；
2. σ 在 V 的任意一组标准正交基下的矩阵的行列式等于 -1。

六. 设矩阵 A 的特征多项式为 $f(\lambda)=(\lambda-2)^3(\lambda-3)^2$。试写出 A 的所有可能的若当标准形。（不计较其中若当块的排列次序）。（ 10分 ）

七.（ 12分 ） 设线性方程组

$$\begin{cases} a_1^{n-1}x_1+a_1^{n-2}x_2+\cdots+a_1x_{n-1}+x_n=-a_1^n \\ a_2^{n-1}x_1+a_2^{n-2}x_2+\cdots+a_2x_{n-1}+x_n=-a_2^n \\ \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\ a_n^{n-1}x_1+a_n^{n-2}x_2+\cdots+a_nx_{n-1}+x_n=-a_n^n, \end{cases}$$

其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为互不相等的数。

1. 证明这个方程组有唯一解； 2. 求出它的唯一解。

八.（ 14分 ） 设 A 为 n 阶复数矩阵，A^* 为 A 的伴随矩阵。λ 是 A 的一个特征值，α 是 A 的对应于 λ 的一个特征向量。证明：存在数 μ 使 μ 是 A^* 的一个特征值且使 α 是 A^* 对应于 μ 的一个特征向量。（按 $\lambda\neq 0$, $\lambda=0$，当 $\lambda=0$ 时，按 0 为单根及重根等情况予以讨论。）