南京大学 2002 年攻读硕士学位研究生入学考试试题（三小时）

考试科目名称及代码 概率论 4906

适用专业：概率统计

注意：

1. 所有答案必须写在"南京大学研究生入学考试答题纸"上，写在试卷和其他纸上无效；

2. 本科目~~允许~~不允许使用无字典存储和编程功能的计算器。

1.（15分，本题中的概率可以只给出算式，不必计算出具体数字）

甲、乙两射手射击命中率分别为

	8	9	10（环）
甲	0.5	0.3	0.2
乙	0.65	0.2	0.15

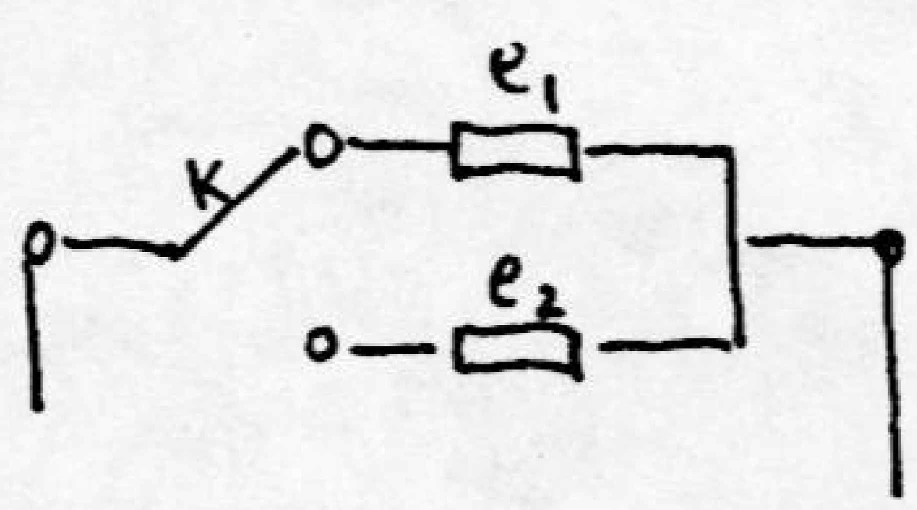
甲、乙同时各自向自己的靶子射击，互不干扰。

① 求：甲乙各射击二次后甲的总环数大于乙的总环数的概率

② 若射击进行到两人同时命中10环为止，求中止射击所需次数的分布。

2. 一电路系统如下图所示

(15分)



其中K为开关，e_1、e_2为两个同样功能的电器元件，开始工作时e_1先工作，e_2贮备着待使用，e_1失效后（不可修复），则K自动转换到e_2上使系统继续工作，记e_1、e_2的工作寿命为ξ_1、ξ_2.

已知 e_1, e_2 的工作寿命分布为

$$P(\xi_i > t) = e^{-\lambda_i t}, \quad t>0 \ (\lambda_i>0), \ i=1,2.$$

设K转换成功的概率为 p. 转换失败的概率为 $q=1-p$. 且设开关转换为瞬时的(所需时间为0).

① 设在等待使用过程中 e_2 的寿命没有损失, 求整个系统工作寿命的分布.

② 设在等待使用过程中, e_2 的寿命分布呈负指数衰减, 即

$$P(\eta > t) = e^{-\mu t} \quad (\mu>0)$$

求整个系统工作寿命的分布.

3 (20分)

① 设随机变量 ξ 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x^3}{64} & 0 \le x \le 4 \\ 0 & \text{其余} \end{cases}$$

求 $\eta=\min\{\sqrt{\xi}, 2-\sqrt{\xi}\}$ 的分布函数

② 设 p-维随机向量 ξ 的协方差矩阵为 C, A 为 $p\times p$-矩阵.
求随机向量 $\eta = A\xi$ 的协方差矩阵.

③ 设 ξ, η 均服从 $N(0, \sigma^2)$ 的正态分布且互相独立. 作变换

$$\xi = R\cos\Theta$$
$$\eta = R\sin\Theta$$

证明:随机变量 R 与 Θ 也互相独立.

南京大学2002 年攻读硕士学位研究生入学考试试题(三小时)

考试科目名称及代码 概率论 9-906

适 用 专 业：概率统计

注意：

1. 所有答案必须写在"南京大学研究生入学考试答题纸"上，写在试卷和其他纸上无效；

2. 本科目~~允许~~不允许使用无字典存储和编程功能的计算器。

4 (15分)

① 设 $f(t)$ 为一特征函数，证明其实数部分 $(\mathrm{Re}f)(t)$ 也是一个特征函数

② 用随机变量 ξ 的各阶矩(假设存在)表示 ξ 的特征函数

③ 设 $\{\xi_n\}$ 为独立同分布 r.v. 序列，各 ξ_n 服从以 λ 为参数的 Poisson 分布，求 $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - E\xi_i)$ 的特征函数 $f_n(t)$，

并求极限 $\lim_{n\to\infty} f_n(t)$。

5. (20分)

① 证明：若 $\{\xi_n\}$ 依分布收敛于某常数 a，则 $\{\xi_n\} \xrightarrow{P} a$。

② 给出一个随机变量序列 $\{\xi_n\}$，它依分布收敛于某一随机变量，但它不几乎处处收敛。

③ 设有一事件序列 $\{A_n\}$，$n=1,2,\cdots\cdots$，由属于 $\{A_n\}$ 中无穷多个 A_k（但不一定属于全部 A_n）的样本点 ω 组成的集合 B 称为 $\{A_n\}$ 无限经常发生的事件，记为 $B=\{A_n, i.o.\}$。

用 A_n 表示事件 B. 试证明 $P(B) \le \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k)$ 对任何正整数 n 成立.

6.（15分）

数理统计中常用下述方法来估计随机变量 ξ 的数学期望 $E\xi$：随机地、互相独立地抽取 ξ 的 n 个样本值 $x_1, \cdots, x_n$. 然后以 $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ 作为 $E\xi$ 的估计值. 试说明这种估计方法的合理性与优良性.