

南京大学 2002 年攻读硕士学位研究生入学考试试题(三小时)

考试科目名称及代码 常微分方程 4-901

适用专业: 基础、应用

注意:

1. 所有答案必须写在“南京大学研究生入学考试答题纸”上, 写在试卷和其他纸上无效;

2. 本科目允许/不允许使用无字典存储和编程功能的计算器。

(每题 10 分)

1. 解方程: $y(1+xy)dx - xdy = 0$.

2. 求出方程

$$y' = 2y - \sin x$$

的 2π 周期解 (即满足 $y(x+2\pi) = y(x)$ 的解).

3. 解三阶方程组 $\dot{x} = Ax$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. 求一阶拟线性偏微分方程

$$xz \frac{\partial z}{\partial x} + yz \frac{\partial z}{\partial y} = -xy$$

的通解和通过曲线

$$y = x^2, z = x^3$$

的积分曲面.

5. 画出方程 $y'' + f(y) = 0$ 的相图 (画出草图即可), 其中 $f(y) = y(y-1)$.

6. 求如下边值问题的特征值和特征函数:

$$y'' + \lambda^2 y = 0, y'(0) = 0, y(\pi) = 0.$$

7. 证明初值问题 $y' = x^3 - y^3, y(x_0) = y_0$ 的解在 $x_0 < x < +\infty$ 上存在.

8. 当 a, b 为何值时, 方程 $y'' + ay' + by = 0$ 的所有解当 $x \rightarrow +\infty$ 时都满足关系 $y = o(e^{-2x})$?

9. 方程 $y^{(n)} = x + y^2$ 存在多少个同时满足两个条件 $y(0) = 1, y'(0) = 2$ 的解? 分别考虑 $n = 1, 2, 3$ 的情形.

10. 证明: 方程 $y'' + q(x)y = 0$ (函数 $q(x)$ 连续) 的两个解的图形不能处于下图位置.

